

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 1.

RECHERCHES
SUR
L'ÉQUATION DE FERMAT
PAR
NIELS NIELSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

INTRODUCTION

FERMAT¹, dans une lettre de février 1657, adressée à Frenicle, a énoncé le théorème:

Soit a un positif entier, sans être un carré, il existe une infinité de nombres entiers y pour lesquels l'expression

$$(1) \quad ay^2 + 1$$

devient un carré.

On voit immédiatement que ce théorème n'est autre chose que celui-ci:

Soit a un positif entier, sans être un carré, l'équation indéterminée du second degré

$$(2) \quad x^2 - ay^2 = 1$$

admet une infinité de solutions en positifs entiers.

Peu de temps après l'énonciation du problème susdit, lord WILLIAM BRONCKER en a donné une résolution que JOHN WALLIS² a rédigée et publiée le premier, tandis que JOHN PELL l'a fait réimprimer dans une autre publication.³ Voilà le seul mérite qu'a acquis PELL dans la théorie de l'équation (2).

¹ *Varia opera mathematica*, p. 190; Toulouse 1679. Œuvres, t. II, p. 333—334.

² *Commercium epistolicum*; Londres 1658.

³ RHONIUS: *Algebra translated by TH. BRANCKER, much altered and augmented*; Londres 1668.

Néanmoins, EULER¹ dit, comme introduction à son aperçu de la résolution de l'équation susdite, due à BROUNCKER :

»Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen.«

Bien que cette remarque soit parfaitement dénuée de fondement, l'autorité suprême d'EULER a néanmoins rattaché le nom de PELL à l'équation (2), proposée par FERMAT², dans la solution de laquelle il n'a acquis aucun mérite, comme le dit très justement WERTHEIM³ :

»Sie [l'équation de Fermat] wird jetzt meist noch nach dem Engländer John Pell benannt, durchaus mit Unrecht, da dieser sich nicht das geringste Verdienst um dieselbe erworben hat.«

Malheureusement, la remarque de WERTHEIM n'est que trop vraie, on attribue encore, le plus souvent, à PELL l'équation de FERMAT. On lit par exemple dans les Cours de LEJEUNE DIRICHLET⁴ :

»Fermat hat diese Gleichung den Mathematikern zuerst vorgelegt, worauf ihre Lösung von dem Engländer Pell angegeben wurde.«

A cet égard une page d'un volume du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*⁵ est très curieuse. En effet, on lit, dans un article : »Geschichte der Fermatschen (so-

¹ Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra nach der französischen Ausgabe des HERRN DE LA GRANGE mit Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben von JOHANN PHILIPP GRÜSON, t. II, p. 242; Berlin 1797.

² Voir G. WERTHEIM: Anfangsgründe der Zahlenlehre, p. 402; Brunswick 1902.

³ Ibid. p. 220.

⁴ Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. DEDEKIND, 3^e édition, p. 200; Brunswick 1879.

⁵ Tome 32 (1901), p. 195.

genannte Pellschen) Gleichung». Et, dans l'article suivant, un autre collaborateur dit tout bonnement: »Lösungen der Pellschen Gleichung.«

Or, ce maintien opiniâtre du faux nom d'équation de PELL me semble un peu choquant, dans ce Journal si méritant, parce qu'on lit, dans le volume qui précède celui que nous venons de citer:¹

»Die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ pflegt noch jetzt die Pell'sche genannt zu werden, obgleich seit langer Zeit feststeht, dass sie sich schon bei Fermat findet, einfach weil der ihr von Euler gegebene Name »Pell'sche Gleichung« sich einmal eingebürgert hat.«

Mais, après cette petite réclamation, résultat peut-être de la publication du livre de M. H. KONEN,² on ne voit plus, que je sache, dans le *Jahrbuch*, le vrai nom d'équation de FERMAT; on applique, au contraire, exclusivement le faux nom d'équation de PELL.

Si un tel exemple de persistance dans l'erreur est donné par un périodique que tout le monde consulte, je ne me flatte pas de pouvoir détourner mes confrères les mathématiciens du chemin battu qu'il suivent en employant l'appellation incorrecte d'équation de PELL, parce que ce nom s'autorise de la remarque erronée d'EULER. Cependant il m'est impossible de passer sous silence, dans l'Introduction de mon Mémoire sur l'équation de FERMAT, cette bévue historique, parce qu'il s'agit ici d'un des plus grands géomètres de tous les siècles.

A ce propos il faut citer encore une remarque de feu M. BACHMANN³:

¹ Tome 31 (1900), p. 189.

² Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$; Leipsic 1901. (Citation d'après WERTHEIM: Anfangsgründe der Zahlenlehre, p. 220.)

³ Niedere Zahlentheorie, t. II, p. 76; Leipsic 1910.

»E. Lucas hat diese Reihen [savoir les deux suites dont les éléments sont les nombres $B_n(2)$ et $2A_n(2)$] als Pellsche Reihen bezeichnet, um das Verdienst zu ehren, welches Pell um die Auflösung der sogenannten Pellschen Gleichung zukomme; gegenwärtig weiss man aber, das dies Verdienst gar nicht nachweisbar ist.«

La résolution générale et rigoureuse de l'équation de FERMAT est due à l'illustre LAGRANGE¹ qui a inventé une méthode ingénieuse, en appliquant la fraction continue, infinie et périodique, qui représente \sqrt{a} .

En effet, cette méthode de LAGRANGE donne à la fois toutes les solutions possibles en positifs entiers de l'équation susdite, et une démonstration aussi élégante que facile des propriétés remarquables de la fraction continue en question, propriétés qui ont été connues par EULER, mais que ce grand géomètre n'a pas pu démontrer.

De plus, la méthode de LAGRANGE donne non seulement la résolution complète de l'équation de FERMAT, mais aussi de cette autre

$$(3) \quad x^2 - ay^2 = -1,$$

pourvu que cette équation soit résoluble en positifs entiers.

Or, en donnant sa méthode remarquable pour résoudre aussi l'équation (3), jusque-là restée inaperçue,² LAGRANGE a présenté aux mathématiciens un problème très difficile, savoir de donner la condition suffisante et nécessaire qui doit être remplie par le nombre a , afin que l'équation (3) soit résoluble en positifs entiers.

A cet égard, LEGENDRE³ a donné la règle très simple:

¹ Miscellanea Taurinensia, t. 4, p. 41—47; 1766—69. Mémoires de l'Académie de Berlin 1767, p. 165—230 (1769).

² EULER dans son Algebra t. II, p. 247—248, donne la résolution de l'équation (2) pour $a = 13$, sans s'arrêter à l'équation (3) correspondante.

³ Théorie des Nombres, t. I, p. 64—71.

L'équation (3) est toujours résoluble en positifs entiers, pourvu que a soit un nombre premier de la forme $4\nu + 1$.

Or, a étant diviseur de la somme $x^2 + 1$, il est évident que ce nombre ne peut contenir aucun facteur premier de la forme $4\nu + 3$.

LEJEUNE DIRICHLET¹ a étudié le cas où a est le produit de deux ou trois nombres premiers de la forme $4\nu + 1$, mais ses belles recherches ne donnent pas, ce me semble, des résultats faciles à appliquer.

Parmi les géomètres qui ont, plus tard, étudié le problème difficile concernant la nature du nombre a qui figure dans l'équation (3), nous citons MM. J. PEROTT², F. TANO³, E. DE JONQUIÈRES⁴, mais les résultats obtenus par eux me semblent, d'un point de vue général, peu satisfaisants.

C'est ce que WERTHEIM⁵ dit très modestement :

»Trotz der Bemühungen von LEGENDRE, LEJEUNE DIRICHLET u. a. ist es noch nicht vollständig gelungen, die Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ anzugeben.«

Quant à cette équation difficile, on lit dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*⁶ :

»Das Problem der Angabe aller Determinanten D , für welche $t^2 - Du^2 = -1$ in ganzen Zahlen t, u lösbar ist, scheint sehr schwierig zu sein.«

Pour ma part, je crois que ce problème est aussi difficile

¹ Abhandlungen der Berliner Akademie 1834, p. 649—664. Werke, t. I, p. 221—236.

² Journal de Crelle, t. 102, p. 185—223; 1887.

³ Ibid. t. 105, p. 160—169; 1889.

⁴ Comptes rendus, t. 126, p. 1837—1843; 1898.

⁵ Anfangsgründe der Zahlenlehre, p. 225; Brunswick 1902.

⁶ Tome 29 (1898), p. 174.

que la détermination générale de l'exposant ε qui figure dans la congruence, également due à LAGRANGE¹,

$$\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^\varepsilon \pmod{p},$$

où p est un nombre premier de la forme $4\nu + 3$.

On sait, du reste, que LEJEUNE DIRICHLET² a remarqué que l'exposant ε est égal au nombre des non-résidus quadratiques de p , contenus dans l'ensemble

$$1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}.$$

Quant à l'équation (3), WERTHEIM³ remarque que, parmi les 90 valeurs de a plus petites que 100, 20 seulement donnent des solutions en positifs entiers de l'équation susdite.

EULER⁴ a donné une table des plus petites valeurs de x et y qui satisfont à l'équation (2), où a représente les 90 valeurs possibles, plus petites que 100, tandis que le professeur danois C.-F. DEGEN⁵ a étendu cette table jusqu'à $a = 1000$.

De plus, EULER⁶ a donné une table des fractions continues qui représentent \sqrt{a} , de $a = 2$ jusqu'à $a = 120$, table que M. A.-S. WEREBRUSOFF⁷ a récemment étendue jusqu'à $a = 1000$.

Quant au présent Mémoire, il donne une partie des résultats que j'ai obtenus dans mes recherches pendant les dernières treize années, recherches qui ont été inspirées par

¹ Nouveaux Mémoires de Berlin, t. 2 (1771), p. 131; 1773.

² Journal de Crellé, t. 3, p. 407—408; 1828. Werke, t. I, p. 105—108.

³ Anfangsgründe der Zahlenlehre, p. 225; Brunswick 1902.

⁴ Algebra, t. II, p. 252—253; Berlin 1797.

⁵ Canon Pellianus; Copenhague 1817.

⁶ Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 11, p. 39—45.

⁷ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik t. 35 (1904), p. 232.

le fameux postulat de M. E. DE JONQUIÈRES¹, savoir que $x = 1$ et $x = 5$ sont les seuls nombres qui satisfont aux deux conditions

$$x = y^2 + (y + 1)^2, \quad x^2 = z^2 + (z + 1)^2,$$

postulat que l'on n'a pas encore réussi à démontrer rigoureusement, que je sache.

Quant aux nombres A_n et B_n , déterminés par une équation de FERMAT

$$A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^{nk}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ils possèdent beaucoup de propriétés remarquables. Nous nous bornerons à indiquer ici que ces nombres A_n et B_n , parfaitement déterminés à l'aide du nombre a , forment un groupe de nombres bien limité.

En effet, il est possible de former des A_n et des B_n tant une Théorie des Nombres, concernant la théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple, qu'une Trigonométrie élémentaire, ayant ses formules d'addition et logarithmiques. De plus, soit p un positif entier donné, quelconque du reste, il existe un indice r , tel que les B_{nr} , où n est un positif entier quelconque, représentent l'ensemble des nombres B_m qui sont divisibles par p , ce qui est essentiel dans plusieurs recherches.

Quant aux résultats que j'ai obtenus, je me suis efforcé d'annoter ceux que j'ai trouvés dans la littérature et d'insérer dans mon texte systématiquement des résultats déjà connus, souvent trouvés par hasard et sans des points de vue généraux, bien que plusieurs de ces résultats soient des conséquences immédiates des propriétés des nombres A_n et B_n susdits. Or, ce travail a été assez difficile et fatigant, parce que la

¹ Nouvelles Annales (2) t. 17, pp. 241—247, 289—310; 1878.

littérature sur l'équation de FERMAT est très éparse, et que plusieurs des publications en question ne se trouvent pas dans nos bibliothèques.

De plus, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qui m'a été très utile, dans d'autres occasions, et principalement par les excellents comptes rendus de M. A. WANGERIN, me semble un guide moins sûr en ce qui concerne l'équation de FERMAT. Cela se comprend, du reste, car plusieurs des travaux dont il s'agit ici sont simplement insupportables, à cause de leur dilettantisme.

C'est pourquoi je demande l'indulgence de mes lecteurs, si mes citations ne sont pas toujours suffisamment épuisantes.

J'ajouterai qu'une étude plus approfondie de la littérature sur l'équation de FERMAT m'a causé plusieurs étonnements, principalement parce que je n'y ai trouvé aucune mention de trois faits très curieux, savoir:

1° L'abréviation considérable des calculs nécessaires pour la détermination des nombres A_1 et B_1 , savoir des plus petites solutions de l'équation de FERMAT dont il s'agit, bien que ces abréviations soient simplement les conséquences des propriétés d'une fraction continue symétrique.

C'est pourquoi j'ai donné, dans le Chapitre Premier, un aperçu des formules fondamentales en question.

2° La méthode de BROUNCKER n'est autre chose qu'un établissement heuristique de la fraction continue de LAGRANGE; du point de vue pratique la méthode de BROUNCKER est énormément compliquée, du point de vue théorique elle est très difficile, parce qu'elle exige la connaissance des nombres ω_r et p_r , nombres qui donnent, du reste, des éclaircissements intéressants sur la fraction continue dont il s'agit.

3° Les solutions générales d'une équation quelconque de FERMAT ne sont autre chose que les polynomes de CAUCHY, pris des nombres A_1 et B_1 , ce qui met en pleine lumière l'analogie frappante qui existe entre les formules récursives de LAGRANGE et les formules fondamentales de la Trigonométrie élémentaire.

Copenhague, le 21 octobre 1921.

NIELS NIELSEN.

CHAPITRE PREMIER

La fraction continue de Lagrange.

I. Remarques sur le problème général.

Soit a un positif entier, qui n'est pas un carré, LAGRANGE¹ a démontré l'existence d'un développement en fraction continue, infinie et périodique, de la forme

$$\sqrt{a} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{k-1} + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \dots}}}}}$$

savoir, sous forme symbolique

$$(1) \quad \sqrt{a} = [\alpha, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1}, 2\alpha)],$$

où particulièrement

$$(1 \text{ bis}) \quad \sqrt{a} = [\alpha, (2\alpha)].$$

Dans ces deux formules, α et les α_r sont des positifs entiers, tels que

$$(2) \quad \alpha_r = \alpha_{k-r}, \quad 1 \leq r \leq k-1.$$

Désignons ensuite par

¹ Miscellanea Taurinensia, t. 4, p. 41—47; 1766—1769. Mémoires de l'Académie de Berlin 1767, p. 165—230 (1769).

$$(3) \quad \frac{y_0}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \dots, \frac{y_{nk-2}}{z_{nk-2}}, \frac{y_{nk-1}}{z_{nk-1}}, \dots,$$

où n est un positif entier quelconque, les réduites de la fraction continue susdite, LAGRANGE a aussi démontré que les nombres

$$(4) \quad A_n = y_{nk-1}, B_n = z_{nk-1}$$

représentent l'ensemble des solutions en positifs entiers de l'équation indéterminée du second degré

$$(5) \quad x^2 - ay^2 = \pm 1,$$

proposée, en 1657, par FERMAT¹, de sorte que l'on aura, quel que soit l'indice n ,

$$(6) \quad A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^{nk}.$$

Cela posé, il est évident que l'équation indéterminée

$$(7) \quad x^2 - ay^2 = -1$$

n'est, pour k pair, jamais résoluble en positifs entiers.

Dans ce qui suit, nous désignons pour abrégé a comme la base de l'équation indéterminée (5), k comme le nombre caractéristique de cette base. De plus, nous disons que a est une base de première ou de seconde espèce, selon que son nombre caractéristique k est impair ou pair, savoir selon que l'équation indéterminée (7) est résoluble en positifs entiers ou non. Enfin nous écrivons $A_n(a)$ et $B_n(a)$ au lieu de A_n et B_n , dans les cas où il s'agit, en même temps, de plusieurs bases différentes.

Soit maintenant p un positif entier quelconque, l'équation de FERMAT

$$(8) \quad x^2 - ap^2y^2 = 1,$$

¹ *Varia opera mathematica*, p. 190; Toulouse 1679. Œuvres, t. II, p. 333—334.

de la base ap^2 , admet aussi une infinité de solutions en positifs entiers. Or, l'équation (8) n'étant autre chose que celle-ci

$$(8 \text{ bis}) \quad x^2 - a(py)^2 = 1,$$

il est évident qu'une infinité des nombres B_n , définis par la seconde des formules (4), sont divisibles par le positif entier p , problème que nous avons à étudier plus amplement dans l'article X.

Soit ensuite a une expression fractionnaire irréductible, savoir

$$(9) \quad a = \frac{b}{c_1 c_2^2},$$

où c_1 est sans facteurs quadratiques, il existe, aussi dans ce cas, un développement en fraction continue, infinie et périodique, de la forme (1), et l'on aura de même

$$(10) \quad y_{nk-1}^2 - \frac{b}{c_1 c_2^2} z_{nk-1}^2 = (-1)^{nk};$$

c'est-à-dire que z_{nk-1} est, quel que soit l'indice n , divisible par $c_1 c_2$. Posons

$$(11) \quad y_{nk-1} = \eta_n, \quad z_{nk-1} = c_1 c_2 \xi_n,$$

il résulte donc, en vertu de (10),

$$(12) \quad \eta_n^2 - bc_1 \xi_n^2 = (-1)^{nk},$$

et, dans cette équation, bc_1 est un positif entier. Appliquons encore la remarque faite concernant les équations (8), nous avons démontré le théorème:

I. Afin de résoudre, en positifs entiers, l'équation indéterminée

$$(13) \quad x^2 - ay^2 = \pm 1,$$

où la base a est un nombre rationnel plus grand que l'unité, il suffit de résoudre une équation de

la même forme, où la base a est un positif entier sans facteurs quadratiques.

Or, il existe, dans l'équation (13), des positifs entiers a , sans facteurs quadratiques, qui ne sont premiers à aucune des valeurs de y .

On voit par exemple que le nombre 6 est une base de seconde espèce, parce que le nombre premier 3 ne peut pas diviser la somme $x^2 + 1$.

De plus, dans l'équation de FERMAT correspondante

$$(14) \quad x^2 - 6y^2 = 1,$$

x étant nécessairement un nombre impair, $x^2 - 1$ est toujours de la forme 8ν ; c'est-à-dire que y est un nombre pair, de sorte que l'équation (14) est la même que celle-ci

$$(14 \text{ bis}) \quad x^2 - 24y^2 = 1.$$

Soit, comme second exemple de ce genre, n et p des positifs entiers quelconques, l'équation de FERMAT

$$(15) \quad x^2 - (n^{2p} - 2)y^2 = 1, \quad n > 1,$$

est satisfaite par

$$(15 \text{ bis}) \quad x = A_1 = n^{2p} - 1, \quad y = B_1 = n^p,$$

et il résulte, en vertu du théorème I de l'article VII, que tous les B_n sont divisibles par n^p .

Quant aux valeurs fractionnaires de a , on aura par exemple, en supposant $\alpha > 1$,

$$(16) \quad \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha}} = [1, (2\alpha, 2)],$$

et l'équation de FERMAT correspondante, savoir

$$(17) \quad x^2 - \frac{\alpha + 1}{\alpha} y^2 = 1,$$

est résolue à l'aide des positifs entiers qui satisfont à celle-ci

$$(18) \quad x^2 - (\alpha^2 + \alpha) y^2 = 1.$$

Remarquons, en passant, que nous aurons

$$(19) \quad \sqrt{\alpha^2 + \alpha} = [\alpha, (2, 2\alpha)],$$

mais que la relation curieuse entre les périodes des deux fractions continues (16) et (19) ne correspond à aucune loi générale.

Enfin, nous avons à remarquer que nous désignons, dans ce qui suit, comme solution triviale de l'équation de FERMAT

$$x^2 - ay^2 = \pm 1,$$

les valeurs

$$(20) \quad x = A_0 = 1, \quad y = B_0 = 0,$$

valeurs qui correspondent, en effet, à l'hypothèse $n = 0$.

II. Des réduites de la fraction continue.

Revenons maintenant à la fraction continue de LAGRANGE, écrite sous la forme

$$(1) \quad \sqrt{a} = [\alpha, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{nk-1}, 2\alpha)],$$

où n est un positif entier quelconque, nous avons tout d'abord à étudier plus amplement ses réduites

$$(2) \quad \frac{y_0}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \dots, \frac{y_{nk-2}}{z_{nk-2}}, \frac{y_{nk-1}}{z_{nk-1}}, \dots$$

A cet égard, nous introduisons la fraction continue, finie et symétrique,

$$(3) \quad K = (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{nk-1}, \alpha),$$

dont les nk premières réduites coïncident avec les nk premiers des nombres (2), tandis que la dernière réduite de K se présente sous la forme

$$(4) \quad \frac{M}{N} = \frac{\alpha y_{nk-1} + y_{nk-2}}{\alpha z_{nk-1} + z_{nk-2}},$$

ce qui donnera

$$y_{nk-1} = N = \alpha z_{nk-1} + z_{nk-2},$$

car la fraction continue K est symétrique.

Posons ensuite

$$(5) \quad \begin{cases} A_n = y_{nk-1}, & B_n = z_{nk-1} \\ a_n = y_{nk-2}, & b_n = z_{nk-2}, \end{cases}$$

il résulte la formule générale

$$(6) \quad A_n = \alpha B_n + b_n,$$

et le numérateur M de la réduite (4) se présente sous la forme

$$M = \alpha A_n + a_n;$$

c'est-à-dire que la formule

$$M z_{nk-1} - N y_{nk-1} = (-1)^{nk-1}$$

donnera

$$(\alpha A_n + a_n) B_n - A_n^2 = (-1)^{nk-1},$$

de sorte que nous aurons la formule, analogue à (6),

$$(7) \quad a B_n = \alpha A_n + a_n.$$

Cela posé, nous avons à déterminer la réduite à l'indice nk de la suite (2); il résulte, en vertu de (5) et (6),

$$y_{nk} = 2\alpha A_n + a_n = \alpha A_n + a B_n$$

$$z_{nk} = 2\alpha B_n + b_n = \alpha B_n + A_n,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$y_{nk} = A_n y_0 + \alpha B_n z_0$$

$$z_{nk} = B_n y_0 + A_n z_0,$$

et la conclusion de m à $m + 1$ donnera immédiatement les formules générales

$$(8) \quad \begin{cases} y_{nk+r} = A_n y_r + a B_n z_r \\ z_{nk+r} = B_n y_r + A_n z_r, \end{cases}$$

essentielles dans la théorie de l'équation de FERMAT.

Résolvons, par rapport aux nombres y_r et z_r , les équations (8), il résulte les formules inverses.

$$(8 \text{ bis}) \quad \begin{cases} y_r = (-1)^{nk} (A_n y_{nk+r} - a B_n z_{nk+r}) \\ z_r = (-1)^{nk} (A_n z_{nk+r} - B_n y_{nk+r}). \end{cases}$$

Posons ensuite, quel que soit l'indice r ,

$$(9) \quad y_r^2 - a z_r^2 = (-1)^{r-1} \omega_r,$$

il est évident que les ω_r sont des positifs entiers, parce que la suite (2) a la valeur limite \sqrt{a} . Soit particulièrement, dans (9), $r = nk - 1$, on aura toujours, quel que soit n ,

$$\omega_{nk-1} = 1,$$

formule qui n'est qu'un cas particulier du théorème general:

I. Les positifs entiers ω_r , définis par la formule (9), sont périodiques, parce que nous aurons, quel que soit n ,

$$(10) \quad \omega_{nk+r} = \omega_r.$$

En effet, on aura, en vertu de (8),

$$y_{nk+r}^2 - a z_{nk+r}^2 = (A_n^2 - a B_n^2) (y_r^2 - a z_r^2),$$

ce qui n'est autre chose que la formule (10).

Dans l'article qui suit, nous avons à démontrer une autre propriété fondamentale des nombres ω_r que nous aurons, du reste, à étudier plus amplement dans les articles IV, VI, XXVI.

Déterminons par exemple les valeurs ω_{nk} , nous prenons pour point de départ les valeurs

$$y_0 = \alpha, \quad z_0 = 1,$$

ce qui donnera immédiatement

$$(11) \quad \omega_{nk} = \omega_0 = a - \alpha^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(11 \text{ bis}) \quad y_{nk}^2 - \alpha z_{nk}^2 = (-1)^{nk} (\alpha^2 - a).$$

Étudions encore les nombres $a_n = y_{nk-2}$ et $b_n = z_{nk-2}$, nous aurons, en vertu des formules (6) et (7),

$$(12) \quad A_n = \frac{ab_n - a_n}{a - \alpha^2}, \quad B_n = \frac{a_n - \alpha b_n}{a - \alpha^2},$$

et il résulte

$$(13) \quad a_n^2 - \alpha b_n^2 = (-1)^{nk} (\alpha^2 - a),$$

ce qui donnera la congruence

$$(14) \quad a_n^2 \equiv (-1)^{nk} \alpha^2 \pmod{a},$$

que nous avons à appliquer dans l'article VIII, où nous nous bornerons à l'étude des nombres $a_n = y_{nk-2}$, bien que les y_{nk} satisfassent à la même congruence.

Soit maintenant $k = 2$, la fraction continue

$$(15) \quad \sqrt{a} = \left[\alpha, (\beta, 2\alpha) \right] = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\beta}},$$

où 2α est supposé divisible par β , est parmi celles que P. SEELING¹ à étudiées. Dans ce cas, nous n'avons qu'à déterminer le seul nombre ω_0 , et nous aurons donc

$$(16) \quad y_{2n+1}^2 - \left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\beta} \right) z_{2n+1}^2 = 1$$

$$(17) \quad y_{2n}^2 - \left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\beta} \right) z_{2n}^2 = -\frac{2\alpha}{\beta},$$

formules qui sont valables, quel que soit n .

¹ Archiv de Grunert, t. 49, p. 4—44; 1868.

Appliquons ensuite les formules récursives

$$\begin{aligned} y_{2n+1} &= \beta y_{2n} + y_{2n-1}, & z_{2n+1} &= \beta z_{2n} + z_{2n-1} \\ y_{2n} &= \alpha y_{2n-1} + y_{2n-2}, & z_{2n} &= \alpha z_{2n-1} + z_{2n-2}, \end{aligned}$$

il résulte, après un simple calcul

$$(18) \quad y_n y_{n-1} - \left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\beta} \right) z_n z_{n-1} = (-1)^n \alpha,$$

et l'on voit que le second membre de cette formule est indépendant de β .

Il est évident, du reste, que ces formules spéciales se présentent sous une forme élégante pour $\beta = \alpha$, hypothèse que nous avons à étudier plus amplement dans l'article XIV.

Nous avons encore à étudier cette autre fraction continue, finie et symétrique,

$$(19) \quad K_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{nk-2}, \alpha_{nk-1});$$

soient

$$(20) \quad \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \dots, \frac{u_{nk-2}}{v_{nk-2}}, \frac{u_{nk-1}}{v_{nk-1}}$$

les réduites de (19), de sorte que

$$(21) \quad u_{nk-2} = v_{nk-1},$$

nous aurons, quel que soit indice $r > 0$, pour les réduites (2),

$$(22) \quad \frac{y_r}{z_r} = \alpha + \frac{v_r}{u_r},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(23) \quad \begin{cases} y_r = \alpha u_r + v_r \\ z_r = u_r; \end{cases}$$

car les fractions qui figurent, dans (22), sont irréductibles.

Soit maintenant, dans (23), $r = nk - 1$, on aura donc

$$(24) \quad \begin{cases} B_n = u_{nk-1} \\ A_n = \alpha u_{nk-1} + v_{nk-1} = \alpha B_n + v_{nk-1}, \end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $r = nk - 2$ donnera de même

$$(25) \quad \begin{cases} b_n = u_{nk-2} = v_{nk-1} \\ a_n = \alpha b_n + v_{nk-2}. \end{cases}$$

III. Du calcul des nombres A_1 et B_1 .

Quant à la détermination des nombres A_1 et B_1 , savoir les plus petites parmi les solutions de l'équation de FERMAT, la formule (6) de l'article précédent donnera la proposition curieuse:

I. Le calcul des nombres A_1 et B_1 exige seulement la détermination des dénominateurs des réduites de la fraction continue qui représente \sqrt{a} , savoir

$$(1) \quad z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-2}, z_{k-1} = B_1,$$

puis on aura

$$(2) \quad A_1 = y_{k-1} = \alpha z_{k-1} + z_{k-2}.$$

Considérons par exemple la fraction continue

$$\sqrt{76} = [8, (1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16)],$$

la suite (1) deviendra

$$1, 1, 3, 4, 7, 39, 163, 859, 1017, 1871, 4759, 6630,$$

et nous aurons donc

$$B_1 = 6630$$

$$A_1 = 8 \cdot 6630 + 4759 = 57799.$$

Curieusement, la proposition I, que je ne me rappelle pas avoir vue autrefois, est précisément le noyau de la méthode de BROUNCKER, dépouillée de ses énormes calculs superflus, nous le verrons dans l'article V.

Il est évident, du reste, que la formule (7) de l'article précédent donnera une proposition analogue à I, savoir:

II. La détermination des nombres A_1 et B_1 exige seulement le calcul des numérateurs des réduites de la fraction continue qui représente \sqrt{a} , savoir

$$(3) \quad y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-2}, y_{k-1} = A_1,$$

puis on aura

$$(4) \quad aB_1 = \alpha y_{k-1} + y_{k-2}.$$

Considérons par exemple la fraction continue

$$\sqrt{86} = [9, (3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18)],$$

la suite (3) deviendra

$$9, 28, 37, 65, 102, 881, 983, 1864, 2847, 10405,$$

et nous aurons donc

$$A_1 = 10405$$

$$86 B_1 = 9 \cdot 10405 + 2847 = 96492, \quad B_1 = 1122.$$

Mais on voit que cette dernière méthode est plus compliquée que la précédente.

Quant au calcul des nombres A_1 et B_1 , nous avons encore à appliquer les fondements de la théorie des fractions continues symétriques.¹

A cet effet, nous prenons pour point de départ la fraction continue

$$(5) \quad K_\nu = (\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu-2}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha),$$

où il faut supposer $2\nu \leq k$ ou $2\nu + 1 \leq k$, selon que k est pair ou impair.

Soient ensuite

$$(6) \quad \frac{\eta_0}{\xi_0}, \frac{\eta_1}{\xi_1}, \frac{\eta_2}{\xi_2}, \dots, \frac{\eta_{\nu-1}}{\xi_{\nu-1}}, \frac{\eta_\nu}{\xi_\nu}$$

¹ Voir par exemple E. LUCAS: Théorie des Nombres, t. I, p. 452—454; Paris 1891.

les réduites de K_ν , les égalités

$$\alpha_{k-r} = \alpha_r, \quad 1 \leq r \leq k-1,$$

donnent immédiatement

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{\nu-1} = z_\nu, \quad \xi_{\nu-1} = z_{\nu-1} \\ \eta_\nu = y_\nu, \quad \xi_\nu = y_{\nu-1}, \end{array} \right.$$

tandis que les formules récursives des nombres y_m et z_m donnent

$$\begin{aligned} y_{k-\nu} &= \alpha_\nu y_{k-\nu-1} + y_{k-\nu-2} = \eta_0 y_{k-\nu-1} + \xi_0 y_{k-\nu-2} \\ z_{k-\nu} &= \alpha_\nu z_{k-\nu-1} + z_{k-\nu-2} = \eta_0 z_{k-\nu-1} + \xi_0 z_{k-\nu-2}, \end{aligned}$$

de sorte que la conclusion de m à $m+1$ conduira immédiatement aux formules générales

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{k-\nu+r} = \eta_r y_{k-\nu-1} + \xi_r y_{k-\nu-2} \\ z_{k-\nu+r} = \eta_r z_{k-\nu-1} + \xi_r z_{k-\nu-2}. \end{array} \right.$$

Cela posé, soit particulièrement $r = \nu - 1$, on aura, en vertu de (7), et en se rappelant que $A_1 = y_{k-1}$ et $B_1 = z_{k-2}$,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = z_\nu y_{k-\nu-1} + z_{\nu-1} y_{k-\nu-2} \\ B_1 = z_\nu z_{k-\nu-1} + z_{\nu-1} z_{k-\nu-2}, \end{array} \right.$$

tandis que l'hypothèse $r = \nu$ donnera, en vertu de la formule (7) de l'article précédent,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = y_\nu z_{k-\nu-1} + y_{\nu-1} z_{k-\nu-2} \\ \alpha B_1 = y_\nu y_{k-\nu-1} + y_{\nu-1} y_{k-\nu-2}. \end{array} \right.$$

Soit maintenant k un nombre impair, savoir $k = 2\mu + 1$, les formules (9) et (10) donnent, pour $\nu = \mu$, où $\mu \geq 1$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{2\mu} = y_\mu z_\mu + y_{\mu-1} z_{\mu-1} \\ z_{2\mu} = z_\mu^2 + z_{\mu-1}^2 \\ \alpha z_{2\mu} = y_\mu^2 + y_{\mu-1}^2 \end{array} \right.$$

où l'on aura par conséquent

$$(11 \text{ bis}) \quad y_{2\mu} = A_1, \quad z_{2\mu} = B_1.$$

Désignons maintenant par $2n + 1$ un positif entier impair quelconque, il est évident que la fraction continue, composée des $2n + 1$ premières périodes de la fraction continue proposée, conduira à des formules analogues à (11), où μ est remplacé par $2n\mu + \mu$, ce qui donnera le théorème général:

III. Soit a une base de première espèce, ayant le nombre caractéristique $2\mu + 1 \geq 3$, on aura, quel que soit l'indice $2n + 1$,

$$(12) \begin{cases} A_{2n+1} = y_{2n\mu+n+\mu} z_{2n\mu+n+\mu} + y_{2n\mu+n+\mu-1} z_{2n\mu+n+\mu-1} \\ B_{2n+1} = z_{2n\mu+n+\mu}^2 + z_{2n\mu+n+\mu-1}^2 \\ \alpha B_{2n+1} = y_{2n\mu+n+\mu}^2 + y_{2n\mu+n+\mu-1}^2. \end{cases}$$

Dans le cas exclu $\mu = 0$, la fraction continue est de la forme $[\alpha, (2\alpha)]$, et tous les nombres y_ν et z_ν sont des A_n et B_n , savoir

$$y_\nu = A_{\nu+1}, \quad z_\nu = B_{\nu+1},$$

de sorte que les formules analogues à (11) donnent, pour une valeur paire de ν , savoir en remplaçant, dans (11), μ par ν ,

$$(12 \text{ bis}) \begin{cases} A_{2n+1} = A_{n+1} B_{n+1} + A_n B_n \\ B_{2n+1} = B_{n+1}^2 + B_n^2 \\ \alpha B_{2n+1} = A_{n+1}^2 + A_n^2, \end{cases}$$

et l'on aura, dans ce cas,

$$a = \alpha^2 + 1,$$

base que nous avons à étudier plus amplement, dans l'article XI.

Étudions maintenant le cas où k est un nombre pair, savoir $k = 2\mu$, les formules (9) et (10) donnent, pour $\nu = \mu - 1$, où il faut supposer $\mu \geq 2$,

$$(13) \quad \begin{cases} y_{2\mu-1} = y_{\mu} z_{\mu-1} + y_{\mu-1} z_{\mu-2} \\ z_{2\mu-1} = (z_{\mu} + z_{\mu-2}) z_{\mu-1} \\ a z_{2\mu-1} = (y_{\mu} + y_{\mu-2}) y_{\mu-1}, \end{cases}$$

où l'on aura par conséquent

$$(13 \text{ bis}) \quad y_{2\mu-1} = A_1, \quad z_{2\mu-1} = B_1.$$

Or, il est évident que les formules (13) sont valables pour la fraction continue, composée de n périodes de la fraction continue proposée, ce qui donnera cet autre théorème, analogue au précédent:

IV. Soit a une base de seconde espèce, ayant le nombre caractéristique 2μ , on aura

$$(14) \quad \begin{cases} A_n = y_{n\mu} z_{n\mu-1} + y_{n\mu-1} z_{n\mu-2} \\ B_n = (z_{n\mu} + z_{n\mu-2}) z_{n\mu-1} \\ a B_n = (y_{n\mu} + y_{n\mu-2}) y_{n\mu-1}, \end{cases}$$

où il faut supposer $n \geq 1$ pour $\mu > 1$, tandis que l'hypothèse $\mu = 1$ exige $n > 1$.

Remarquons, en passant, que le dernier nombre de la suite

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n\mu-1}$$

est d'une nature très différente selon que n est pair ou impair.

En effet, soit tout d'abord n un nombre pair, on aura

$$\omega_{n\mu-1} = \omega_{2\mu-1} = 1,$$

tandis que l'hypothèse n impair donnera

$$\omega_{n\mu-1} = \omega_{\mu-1} > 1.$$

Les formules que nous venons de développer sont certainement connues, sous une autre forme peut-être, néanmoins je ne me rappelle pas les avoir vu appliquer dans la théorie de l'équation de FERMAT, où elles jouent un rôle

essentiel, parce qu'elles permettent d'abrégier beaucoup les calculs nécessaires, afin de déterminer les nombres A_1 et B_1 .

Soit par exemple $a = 61$, la fraction continue deviendra

$$\sqrt{61} = [7, (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14)],$$

de sorte que la base 61 a le nombre caractéristique 11, et il faut donc calculer les 6 premières des réduites, afin de déterminer A_1 et B_1 , savoir

$$\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{39}{5}, \frac{125}{16}, \frac{164}{21}, \frac{453}{58},$$

ce qui donnera

$$A_1 = 453 \cdot 48 + 164 \cdot 21 = 29718$$

$$B_1 = 58^2 + 21^2 = 3805.$$

Soit, comme second exemple, $a = 94$, on aura la fraction continue

$$\sqrt{94} = [9, (1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18)],$$

et la base 94 a donc le nombre caractéristique $2\mu = 16$, de sorte qu'il faut calculer les 9 premiers des réduites, savoir

$$\frac{9}{1}, \frac{10}{1}, \frac{29}{3}, \frac{97}{10}, \frac{126}{13}, \frac{223}{23}, \frac{1241}{128}, \frac{1464}{151}, \frac{12953}{1336},$$

et l'on aura

$$A_1 = 12953 \cdot 151 + 1464 \cdot 128 = 2143295$$

$$B_1 = 151(1336 + 128) = 221064.$$

Revenons maintenant aux formules (9) et (10), afin de déterminer, à l'aide de ces deux groupes d'équations, les nombres z_r respectivement y_r , nous aurons

$$(15) \quad \begin{cases} (-1)^{k-r} z_r = A_1 z_{k-r-2} - B_1 y_{k-r-2} \\ (-1)^{k-r} y_r = a B_1 z_{k-r-2} - A_1 y_{k-r-2}, \end{cases}$$

ce qui donnera immédiatement la proposition supplémentaire de la proposition I de l'article précédent:

V. Les nombres ω_r qui correspondent à la même période sont symétriques, savoir

$$(16) \quad \omega_{k-r-2} = \omega_r, \quad 0 \leq r \leq k-2.$$

Cela posé, on voit que les formules (11) et (13) de l'article précédent donnent la formule (16) qui correspond à $r = 0$.

Soit par exemple $a = 97$, la fraction continue deviendra

$$\sqrt{97} = [9, (1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18)],$$

de sorte que la base 97 a le nombre caractéristique $k = 11$, et l'on aura par conséquent à calculer les 5 premières de ses réduites, savoir

$$\frac{9}{1}, \frac{10}{1}, \frac{59}{6}, \frac{69}{7}, \frac{128}{13},$$

ce qui donnera

$$\omega_0 = \omega_9 = 16, \quad \omega_1 = \omega_8 = 3, \quad \omega_2 = \omega_7 = 11, \quad \omega_3 = \omega_6 = 8, \\ \omega_4 = \omega_5 = 9.$$

Soit, comme second exemple, $a = 71$, on aura la fraction continue

$$\sqrt{71} = [8, (2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16)];$$

c'est-à-dire que la base 71 a le nombre caractéristique $k = 8$; il faut donc calculer les 4 premières de ses réduites, savoir

$$\frac{8}{1}, \frac{17}{2}, \frac{42}{5}, \frac{59}{7},$$

et l'on aura

$$\omega_0 = \omega_6 = 7, \quad \omega_1 = \omega_5 = 5, \quad \omega_2 = \omega_4 = 11, \quad \omega_3 = 2.$$

IV. Des nombres premiers de la forme $4\nu + 3$.

LEGENDRE¹ a démontré qu'un nombre premier de la forme $4\nu + 1$ est toujours une base de première espèce,

¹ Théorie des Nombres, t. I, p. 65; 3^e édition, Paris 1830.

théorème que nous aurons à généraliser, en démontrant par deux méthodes différentes, dans les articles X et XXIII, que le nombre $a = (4\nu + 1)^{2\nu+1}$ est une base de première espèce, de sorte que, pour ces valeurs de a , les nombres B_{2n+1} et aB_{2n+1} sont toujours la somme de deux carrés.

Or, les nombres de la forme $a = (4\nu + 3)^{2\nu+1}$ où $4\nu + 3$ est un nombre premier, conduiront à des propriétés intéressantes des nombres A_{2n+1} et B_{2n+1} , mais d'une nature différente de celles des B_{2n+1} du cas précédent.

A cet effet, nous prenons pour point de départ les formules (15) de l'article précédent; en supposant $k = 2\mu$, nous aurons pour $\nu = \mu - 1$, où nous supposons $\mu > 1$,

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 z_{\mu-1} - B_1 y_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1} z_{\mu-1} \\ aB_1 z_{\mu-1} - A_1 y_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1} y_{\mu-1}. \end{cases}$$

Or, $y_{\mu-1}$ et $z_{\mu-1}$ étant premiers entre eux, la première de ces formules donnera

$$(2) \quad B_1 = z_{\mu-1} \varrho_{\mu-1},$$

où $\varrho_{\mu-1}$ est un positif entier; on aura du reste, en vertu des formules (13) de l'article précédent,

$$(3) \quad \varrho_{\mu-1} = z_{\mu} + z_{\mu-2}.$$

Cela posé, la première des formules (1) se présente sous la forme

$$(4) \quad \varrho_{\mu-1} y_{\mu-1} = A_1 + (-1)^{\mu},$$

tandis que la dernière de ces formules deviendra, en vertu de (2),

$$(5) \quad a\varrho_{\mu-1} z_{\mu-1}^2 = (A_1 - (-1)^{\mu}) y_{\mu-1},$$

ce qui donnera

$$(6) \quad a\varrho_{\mu-1} = \sigma_{\mu-1} y_{\mu-1},$$

où $\sigma_{\mu-1}$ est un positif entier, de sorte que la formule (5) se transforme en celle-ci

$$(7) \quad \sigma_{\mu-1} z_{\mu-1}^2 = A_1 - (-1)^\mu,$$

tandis que la formule (4) donnera, en vertu de (6),

$$(8) \quad \sigma_{\mu-1} y_{\mu-1}^2 = a(A_1 + (-1)^\mu).$$

Éliminons ensuite, des deux dernières formules, le nombre A_1 , il résulte

$$(9) \quad \sigma_{\mu-1} (y_{\mu-1}^2 - a z_{\mu-1}^2) = (-1)^\mu 2a,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(9 \text{ bis}) \quad \sigma_{\mu-1} \omega_{\mu-1} = 2a.$$

Remarquons encore qu'il résulte, en vertu de (2) et (6),

$$(10) \quad aB_1 = \sigma_{\mu-1} y_{\mu-1} z_{\mu-1},$$

tandis que la dernière des formules (13) de l'article précédent donnera, en vertu de (10),

$$(10 \text{ bis}) \quad \sigma_{\mu-1} z_{\mu-1} = y_\mu + y_{\mu+2}.$$

Il est évident que toutes les formules que nous venons de développer sont valables pour une base quelconque de seconde espèce.

Soit maintenant

$$a = (4\nu + 3)^{2\varrho+1}, \quad \varrho \geq 0,$$

où $4\nu + 3$ est un nombre premier, il est possible d'approfondir beaucoup les résultats susdits.

A cet effet, supposons tout d'abord que $\sigma_{\mu-1}$ ne soit pas divisible par $4\nu + 3$, il résulte, en vertu de (9),

$$(11) \quad \sigma_{\mu-1} = 1 \quad \text{ou} \quad \sigma_{\mu-1} = 2.$$

Or, il est facile de démontrer que la valeur $\sigma_{\mu-1} = 1$ est inadmissible, parce qu'elle donnera, en vertu de (7),

$$A_1 = z_{\mu-1}^2 + (-1)^\mu,$$

et l'on aura

$$A_1 = z_{\mu-1} y_\mu + z_{\mu-2} y_{\mu-1} > z_{\mu-1}^2 + 1.$$

Quant à la seconde des valeurs (11), on aura

$$A_1 = 2z_{\mu-1}^2 + (-1)^\mu = z_{\mu-1} y_\mu + z_{\mu-2} y_{\mu-1},$$

savoir

$$(12) \quad z_{\mu-1}(2z_{\mu-1} - y_\mu) = z_{\mu-2} y_{\mu-1} - (-1)^\mu.$$

Or, nous aurons toujours, abstraction faite du cas spécial, $\nu = \rho = 0$, $\alpha = 3$,

$$(13) \quad y_\mu > 2z_\mu \geq 2z_{\mu-1}.$$

En effet, remarquons que nous aurons $\alpha \geq 2$, $\alpha_1 \geq 1$, il résulte

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, & z_0 &= 1, & y_0 &\geq 2z_0 \\ y_1 &= \alpha\alpha_1 + 1, & z_1 &= \alpha_1, & y_1 &> 2z_1, \end{aligned}$$

et la conclusion de m à $m + 1$ conduira immédiatement à l'inégalité générale (13); c'est-à-dire que la formule (12) ne peut exister, donc la valeur $\sigma_{\mu-1} = 2$ n'est pas applicable.

Cela posé, il est évident que $\sigma_{\mu-1}$ est nécessairement divisible par le nombre premier $4\nu + 3$, savoir

$$(14) \quad \sigma_{\mu-1} = (4\nu + 3)^r k_{\mu-1},$$

où il faut admettre, en vertu de (9),

$$(14 \text{ bis}) \quad k_{\mu-1} = 1 \quad \text{ou} \quad k_{\mu-1} = 2.$$

Démontrons maintenant que $y_{\mu-1}$ ne peut jamais être divisible par $4\nu + 3$. En effet, soit

$$y_{\mu-1} = (4\nu + 3)^\sigma t_{\mu-1}, \quad \sigma > 0,$$

on aura, en vertu de (3) et (6),

$$(15) \quad \sigma_{\mu-1} y_{\mu-1} = \alpha(z_\mu + z_{\mu-2}),$$

ce qui donnera

$$(4\nu + 3)^{\sigma+\tau} t_{\mu-1} k_{\mu-1} = (4\nu + 3)^{2\rho+1} (z_{\mu} + z_{\mu-2}),$$

de sorte qu'il faut supposer

$$(16) \quad \sigma + \tau \geq 2\rho + 1,$$

parce que nous ne savons pas dès à présent si $z_{\mu} + z_{\mu-2}$ est divisible par $4\nu + 3$ ou non.

Introduisons maintenant, dans (9), les expressions susdites de $\sigma_{\mu-1}$ et de $y_{\mu-1}$, il résulte

$$(17) \quad \begin{cases} (4\nu + 3)^{\tau} k_{\mu-1} \left((4\nu + 3)^{2\sigma} t_{\mu-1}^2 - (4\nu + 3)^{2\rho+1} z_{\mu-1}^2 \right) = \\ = (-1)^{\mu} 2(4\nu + 3)^{2\rho+1}. \end{cases}$$

Or, il est facile de voir que cette équation est inadmissible, parce que le premier membre est divisible par une puissance de $4\nu + 3$ plus élevée que celle qui divise le second membre. En effet, l'exposant de cette puissance de $4\nu + 3$ deviendra ou $\tau + 2\sigma$ ou $\tau + 2\rho + 1$, selon que $\sigma \leq \rho$ ou $\sigma > \rho$.

Cela posé, il est évident que $y_{\mu-1}$ ne peut jamais être divisible par $4\nu + 3$, et l'on aura donc, en vertu de (9),

$$\tau = 2\rho + 1,$$

ce qui donnera, en vertu de (14),

$$(18) \quad \sigma_{\mu-1} = a \text{ ou } \sigma_{\mu-1} = 2a.$$

Or, la dernière de ces deux valeurs est inadmissible, parce qu'elle donnera, en vertu de (9),

$$y_{\mu-1}^2 - a^2 z_{\mu-1}^2 = (-1)^{\mu},$$

ce qui exige nécessairement que μ soit un nombre pair, car a est une base de seconde espèce, mais on aura $A_1 > y_{\mu-1}$, et A_1 et B_1 sont les plus petites solutions de l'équation de FERMAT en question. C'est-à-dire qu'il ne nous reste que la valeur $\sigma_{\mu-1} = a$, ce qui donnera

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{\mu-1} = z_{\mu} + z_{\mu-2} \\ az_{\mu-1} = y_{\mu} + y_{\mu-2} \\ y_{\mu-1}^2 = az_{\mu-1}^2 + (-1)^{\mu} 2, \end{array} \right.$$

savoir

$$(20) \quad \omega_{\mu-1} = 2;$$

de plus, on aura, pour les nombres A_1 et B_1 ,

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = y_{\mu-1}^2 - (-1)^{\mu} \\ B_1 = y_{\mu-1} z_{\mu-1}. \end{array} \right.$$

Dans ces développements, nous avons supposé $\mu > 1$, de sorte qu'il nous reste à considérer le cas spécial $\mu = 1$, ce qui nous conduira à la fraction continue (15) de l'article II, et nous aurons par conséquent

$$a = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{\beta},$$

où 2α est divisible par β .

Cela posé, soit $\alpha = k\beta$ ou $\alpha = 2k\beta$, on aura respectivement

$$a = k(k\beta^2 + 2), \quad a = 4k(k\beta^2 + 1),$$

et il est évident que ces deux nombres ne sont ni un premier ni une puissance d'un premier, à moins que $k = 1$, ce qui donnera

$$a = \beta^2 + 2, \quad a = 4\beta^2 + 4,$$

et, le second de ces nombres n'étant jamais une puissance de $4\nu + 3$, il nous reste seulement à considérer le premier.

La fraction continue correspondante, savoir

$$\sqrt{\beta^2 + 2} = [\beta, (\beta, 2\beta)],$$

donnera immédiatement

$$y_0 = \beta, \quad z_0 = 1; \quad y_1 = A_1 = \beta^2 + 1, \quad z_1 = B_1 = \beta,$$

de sorte que les formules (20) et (21) sont valables aussi dans ce cas, quel que soit le nombre $\beta^2 + 2$, premier ou non.

De plus, il est évident que le cas $a = 3$, exclu dans la démonstration de l'inégalité (13), est contenu dans la forme $\beta^2 + 2$, savoir pour $\beta = 1$; c'est-à-dire que les formules (20) et (21) sont valables, quel que soit le nombre premier $4\nu + 3$, savoir quel que soit le positif entier μ .

Quant à la dernière des formules (19), remarquons, avec LEGENDRE¹, que les nombres $y_{\mu-1}$ et $z_{\mu-1}$ sont tous deux impairs, et que le premier membre de la formule susdite est de la forme $8\sigma - 2$ ou $8\sigma + 2$, selon que ν est pair ou impair, savoir $a = 8\tau + 3$ respectivement $a = 8\tau + 7$, ce qui donnera la proposition curieuse que je ne me rappelle pas avoir vue autrefois:

I. Soit $4\nu + 3$ un nombre premier, et soit 2μ le nombre caractéristique de la base

$$(22) \quad a = (4\nu + 3)^{2q+1}, \quad q \geq 0,$$

μ et ν sont toujours de différente parité, de sorte que $\mu + \nu$ est un nombre impair.

Cela posé, je dis que les formules que nous venons de développer donnent les deux théorèmes suivants:

II. Soit 2μ le nombre caractéristique de la base $a = (4\nu + 3)^{2q+1}$, où $4\nu + 3$ est un nombre premier, on aura, quel que soit n ,

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{2n+1} = y_{2n\mu+\mu-1}^2 + (-1)^\nu \\ B_{2n+1} = y_{2n\mu+\mu-1} z_{2n\mu+\mu-1} \end{array} \right.$$

En effet, on voit que les deux formules en question sont vraies pour $n = 0$. De plus, les formules récursives de LAGRANGE, que nous avons à étudier plus amplement dans l'article VII, donnent, en vertu de (21),

¹ Théorie des Nombres, t. I, p. 66; 3^e édition, Paris 1830.

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= A_{2n} (y_{\mu-1}^2 + (-1)^\nu) + aB_{2n} y_{\mu-1} z_{\mu-1} \\ B_{2n+1} &= A_{2n} y_{\mu-1} z_{\mu-1} + B_{2n} (y_{\mu-1}^2 + (-1)^\nu), \end{aligned}$$

tandis que nous aurons, en vertu des formules générales (8) de l'article II,

$$(24) \quad \begin{cases} y_{2n\mu+\mu-1} = A_n y_{\mu-1} + aB_n z_{\mu-1} \\ z_{2n\mu+\mu-1} = B_n y_{\mu-1} + A_n z_{\mu-1}. \end{cases}$$

Introduisons maintenant, dans (23), ces expressions, puis appliquons les formules

$$A_{2n} = A_n^2 + aB_n^2, \quad B_{2n} = 2A_n B_n,$$

conséquences immédiates des formules récursives de LAGRANGE, la vérification des formules en question est faite.

De plus, les formules (24) donnent immédiatement, en vertu de (19), le second des théorèmes susdits, savoir :

III. Soit 2μ le nombre caractéristique de la base $a = (4\nu + 3)^{2q+1}$, où $4\nu + 3$ est un nombre premier, on aura, quel que soit n ,

$$(25) \quad \begin{cases} y_{2n\mu+\mu-1}^2 - az_{2n\mu+\mu-1}^2 = (-1)^{\nu-1} 2 \\ y_{2n\mu+\mu-1} = z_{2n\mu+\mu} + z_{2n\mu+\mu-2} \\ az_{2n\mu+\mu-1} = y_{2n\mu+\mu} + y_{2n\mu+\mu-2}. \end{cases}$$

Dans l'article XXIII, nous avons à revenir, d'un autre point de vue, aux formules (23).

Quant à la dernière des formules (19), nous avons encore à démontrer la proposition :

IV. Soit $a = (4\nu + 3)^{2q+1}$, où $4\nu + 3$ est un nombre premier, l'équation indéterminée

$$(26) \quad x^2 - ay^2 = (-1)^\mu 2$$

n'est jamais résoluble en positifs entiers, à moins que μ et ν ne soient de différente parité; dans ce cas, la solution complète de l'équation susdite deviendra

$$(27) \quad x = y_{2n\mu+\mu-1}, \quad y = z_{2n\mu+\mu-1}.$$

La partie de la proposition qui concerne les nombres μ et ν est évidente. Supposons ensuite résoluble en positifs entiers l'équation (26), puis désignons par u, v une solution quelconque, les deux nombres u et v sont nécessairement tous deux impairs. Posons ensuite

$$(28) \quad \xi = u^2 - (-1)^\mu, \quad \eta = uv,$$

un calcul direct donnera, en vertu de (26),

$$\xi^2 - a\eta^2 = 1,$$

de sorte que nous aurons

$$\xi = A_{2n+1}, \quad \eta = B_{2n+1},$$

car η est un nombre impair, et les $B_{2n} = 2A_n B_n$ sont des nombres pairs.

Cela posé, nous aurons, en vertu de (23),

$$\xi = y_{2n\mu+\mu-1}^2 - (-1)^\mu, \quad \eta = y_{2n\mu+\mu-1} z_{2n\mu+\mu-1},$$

donc les formules (28) donnent

$$(29) \quad u = y_{2n\mu+\mu-1}, \quad v = z_{2n\mu+\mu-1},$$

savoir les expressions (27).

V. De la méthode de Brouncker.

Quant à la première méthode appliquée pour résoudre l'équation de FERMAT, savoir la méthode de BROUNCKER, rédigée et publiée par WALLIS¹, mais faussement attribuée à PELL, d'après une remarque erronée d'EULER², on lit par exemple dans les Cours de LEJEUNE DIRICHLET³.

¹ *Commercium epistolicum*, Londres 1658.

² *Algebra*, t. II, p. 242, herausgegeben von J. P. GRÜSON; Berlin 1797. Voir aussi G. WERTHEIM: *Anfangsgründe der Zahlenlehre*, p. 402; Brunswick 1902.

³ *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von R. DEDEKIND, 3^e édition, p. 200; Brunswick 1879.

». . . allein obwohl seine Methode [la méthode de BRONCKER faussement attribuée à PELL] die Lösung in jedem Falle wirklich giebt, so lag doch in ihr nicht der Nachweis, dass sie immer zum Ziele führen muss.«

De même, WERTHEIM¹ dit:

». . . [la méthode de BRONCKER] hat nicht nur den Nachteil, höchst umständlich zu sein, sondern sie lässt auch nicht erkennen, dass die Aufgabe immer möglich ist.«

Ces remarques amènent tout naturellement le lecteur à se demander quelle est donc la nature cachée et énigmatique de cette méthode compliquée. Or, EULER ayant développé très nettement la méthode susdite, il est possible de donner une réponse complète à une telle question.

A cet effet, soit a la base en question, et soit k son nombre caractéristique, nous posons

$$(1) \quad \sqrt{a} = [\alpha, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, 2\alpha)],$$

où il faut admettre $\nu = k$ ou $\nu = 2k$, selon que k est pair ou impair; c'est-à-dire que ν est toujours un nombre pair. De plus, nous désignons par

$$(2) \quad \frac{y_0}{z_0}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \dots, \frac{y_{\nu-2}}{z_{\nu-2}}, \frac{y_{\nu-1}}{z_{\nu-1}}$$

les ν premières réduites de la fraction continue (1), de sorte que nous aurons

$$(3) \quad \begin{cases} A_1 = y_{\nu-1}, & B_1 = z_{\nu-1} \\ A_2 = y_{\nu-1}, & B_2 = z_{\nu-1}, \end{cases}$$

selon que k est pair ou impair.

Ces définitions adoptées, je dis que:

I. La méthode de Brouncker pour résoudre l'équation de FERMAT

$$(4) \quad x^2 - ay^2 = 1$$

¹ Anfangsgründe der Zahlenlehre, p. 219; Brunswick 1902.

n'est, du point de vue pratique, qu'un calcul successif et extrêmement compliqué des dénominateurs z_r des réduites (2), d'après les formules récurrentes

$$(5) \quad z_r = \alpha_r z_{r-1} + z_{r-2}, \quad 0 \leq r \leq \nu - 1,$$

puis $y_{\nu-1}$ se détermine, en vertu de la formule

$$(6) \quad y_{\nu-1} = \alpha z_{\nu-1} + z_{\nu-2};$$

c'est-à-dire que la méthode de Brouncker est, d'un point de vue pratique, l'établissement masqué et énormément compliqué de la fraction continue de LAGRANGE. Mais d'un point de vue théorique, la méthode de Brouncker présente d'autres difficultés considérables.

Or, il n'est pas possible de démontrer, d'un point de vue général, ce postulat, parce que le procédé de BROUNCKER n'est pas une méthode générale.

En effet, EULER¹ dit expressément:

»Diese [la méthode de BROUNCKER, faussement attribuée à PELL] ist aber nicht so beschaffen, dass sie auf eine allgemeine Art für eine jede Zahl a , sondern nur für einen jeden Fall besonders gebraucht werden kann.«

Cela posé, il ne nous reste donc qu'à examiner quelques-uns des exemples considérés par EULER, et, afin de mettre en pleine lumière la vraie nature de la méthode de BROUNCKER, nous coordonnons les racines carrées, appliquées par EULER, et les expressions correspondantes de y_r , savoir

$$(7) \quad y_r = \sqrt{az_r^2 - (-1)^r \omega_r}, \quad 0 \leq r \leq \nu - 1,$$

tirées directement de la définition des nombres ω_r , savoir la formule (9) de l'article II.

¹ Algebra, herausgegeben von J. P. GRÜSON, t. II, p. 242; Berlin 1797.

Exemple I. $a = 6, \nu = k = 2.$

Dans ce cas, la fraction continue et ses deux premières réduites deviennent

$$\sqrt{6} = [2, (2, 4)], \frac{2}{1}, \frac{5}{2},$$

et l'on aura, d'après EULER,

$$m^2 = 6n^2 + 1, \quad m > 2n, \quad m = 2n + p,$$

d'où, en éliminant m , puis cherchant n de l'équation quadratique ainsi obtenue,

$$n = \frac{2p + \sqrt{6p^2 - 2}}{2}, \quad y_0 = \sqrt{6z_0^2 - 2},$$

ce qui donnera $n > 2p$, savoir $n = 2p + q$, d'où il résulte, en éliminant n , puis cherchant p de l'équation quadratique ainsi obtenue,

$$p = 2q + \sqrt{6q^2 + 1},$$

où la racine carrée est de la même forme que celle obtenue pour m , savoir

$$m = \sqrt{6n^2 + 1}.$$

Posons ensuite $q = 0$, nous aurons successivement

$$p = 1, \quad n = 2, \quad m = 5.$$

Exemple II. $a = 7, \nu = k = 4,$

ce qui donnera la fraction continue et ses 4 premières réduites

$$\sqrt{7} = [2, (1, 1, 1, 4)], \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}.$$

Posons ensuite avec EULER

$$m^2 = 7n^2 + 1, \quad m > 2n, \quad m = 2n + p,$$

nous aurons, par le procédé indiqué dans l'exemple I,

$$n = \frac{2p + \sqrt{7p^2 - 3}}{3}, \quad y_2 = \sqrt{7z_2^2 - 3};$$

$$n > p, \quad n = p + q$$

$$p = \frac{q + \sqrt{7q^2 + 2}}{2}, \quad y_1 = \sqrt{7z_1^2 + 2};$$

$$p > q, \quad p = q + r$$

$$q = \frac{r + \sqrt{7r^2 - 3}}{3}, \quad y_0 = \sqrt{7z_0^2 - 3};$$

$$q > r, \quad q = r + s, \quad r = 2s + \sqrt{7s^2 + 1},$$

où la racine carrée est de la même forme que celle obtenue pour m , savoir

$$m = \sqrt{7n^2 + 1}.$$

Soit donc $s = 0$, on aura successivement

$$r = 1, \quad q = 1, \quad p = 2, \quad n = 3, \quad m = 8.$$

Quant à la méthode ainsi expliquée, EULER¹ fait la remarque caractéristique:

»Bisweilen gelangt man bald zu seinem Zweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, nach Beschaffenheit der Zahl a , wovon man doch keine gewisse Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich schnell; kömmt man aber zu dem Falle, wo $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläufiger, und daher wird es gut seyn, diesen Fall genauer zu betrachten.«

Cela posé, il nous semble utile de donner un aperçu de la résolution, d'après la méthode de BROUNCKER, de l'équation de FERMAT qui correspond à $a = 13$.

Exemple III. $a = 13$, $k = 5$, $\nu = 2k = 10$.

La fraction continue correspondante

$$\sqrt{13} = [3, (1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6)]$$

a les 10 premières réduites

¹ Algebra, herausgegeben von J. P. GRÜSON, t. II, p. 246; Berlin 1797.

$$(8) \quad \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180}.$$

Posons maintenant, avec EULER

$$m = 13n^2 + 1, \quad m > 3n, \quad m = 3n + p,$$

nous aurons, comme dans les deux exemples précédents,

$$m = 3n + p, \quad n = \frac{3p + \sqrt{13p^2 - 4}}{4}, \quad y_8 = \sqrt{13z_8^2 - 4}$$

$$n = p + q, \quad p = \frac{q + \sqrt{13q^2 + 3}}{3}, \quad y_7 = \sqrt{13z_7^2 + 3}$$

$$p = q + r, \quad q = \frac{2r + \sqrt{13r^2 - 3}}{3}, \quad y_6 = \sqrt{13z_6^2 - 3}$$

$$q = r + s, \quad r = \frac{s + \sqrt{13s^2 + 4}}{4}, \quad y_5 = \sqrt{13z_5^2 + 4}$$

$$r = s + t, \quad s = 3t + \sqrt{13t^2 - 1}, \quad y_4 = \sqrt{13z_4^2 - 1}$$

$$s = 6t + u, \quad t = \frac{3u + \sqrt{13u^2 + 4}}{4}, \quad y_3 = \sqrt{13z_3^2 + 4}$$

$$t = u + v, \quad u = \frac{v + \sqrt{13v^2 - 3}}{3}, \quad y_2 = \sqrt{13z_2^2 - 3}$$

$$u = v + x, \quad v = \frac{2x + \sqrt{13x^2 + 3}}{3}, \quad y_1 = \sqrt{16z_1^2 + 3}$$

$$v = x + y, \quad x = \frac{y + \sqrt{13y^2 - 4}}{4}, \quad y_0 = \sqrt{16z_0^2 - 4}$$

$$x = y + z, \quad y = 3z + \sqrt{13z^2 + 1}.$$

Ayant ainsi obtenu une racine carrée de la même forme que celle qui représente m , savoir $\sqrt{13n^2 + 1}$, nous posons $z = 0$, et nous trouvons successivement

$$y = 1, \quad x = 1, \quad v = 2, \quad u = 3, \quad t = 5, \quad s = 33, \quad r = 38, \quad q = 71, \\ p = 109, \quad n = 180, \quad m = 649,$$

savoir les dénominateurs des réduites (8) et le numérateur de la dernière.

De plus, on voit que les relations rationnelles établies entre les m, n, p, q etc., ne sont autre chose que les formules récursives (5), appliquées aux dénominateurs des réduites (8), suppléées par la formule (6) correspondante.

On voit, du reste, que les exemples $a = 7, a = 13$ sont peu caractéristiques, à cause des nombreux nombres 1 dans les périodes, mais EULER n'en donne pas d'autres plus caractéristiques, et il saute aux yeux que ces exemples confirment parfaitement notre postulat concernant la méthode de BRONCKER.

Remarquons que cette méthode donne dans l'ordre inverse les formules récursives (5) et par conséquent aussi les dénominateurs z_r , mais ce renversement ne joue aucun rôle pour la fraction continue, parce que sa période est symétrique.

Revenons maintenant au cas $a = 13$; EULER poursuit ses calculs sans s'arrêter à la relation curieuse

$$s = 3t + \sqrt{13t^2 - 1}, \quad y_4^2 - 13z_4^2 = -1,$$

savoir à la résolution de l'équation indéterminée

$$x^2 - 13y^2 = -1,$$

ce qui s'accorde bien avec le fait que les équations

$$x^2 - ay^2 = -1$$

sont restées complètement inaperçues jusqu'à ce que LAGRANGE a donné sa résolution ingénieuse de l'équation de FERMAT.

Remarquons encore que le cas $a = 13$ donne des relations de la forme

$$(9) \quad \omega_r z_{r+1} = p_r z_r + y_r,$$

où les p_r sont des positifs entiers que nous avons à étudier dans l'article qui suit. De plus, les formules en question montrent une périodicité des nombres p_r , analogue à celle que nous avons établie, dans l'article II, pour les ω_r .

Revenons maintenant à la méthode de BROUNCKER.

EULER¹, ayant terminé les longs calculs exigés par $a = 13$, remarque:

»Aus diesem Beyspiele sieht man deutlich, wie weitläufig eine solche Rechnung werden könne. Denn unter den grösseren Zahlen muss man oft wohl zehn mal mehr Operationen machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen, bey welchen Zahlen so grosse Mühe erfordert wird.«

Oui, les manques fondamentaux de la méthode de BROUNCKER sont évidents. En effet, du point de vue théorique, la méthode étant complètement heuristique, elle ne peut donner aucune démonstration générale de l'existence des positifs entiers qui satisfont à l'équation correspondante de FERMAT. Mais, de plus, la méthode de BROUNCKER exige la connaissance des nombres ω_r et p_r , étrangers à la méthode de LAGRANGE. Or, cette dernière méthode fondée, c'est-à-dire l'existence des solutions de l'équation de FERMAT établie, la méthode de BROUNCKER nous permet une étude plus approfondie de la fraction continue de LAGRANGE, nous le verrons dans l'article qui suit.

En second lieu, du point de vue pratique, la méthode de BROUNCKER est énormément compliquée, comme le montre clairement le cas $a = 13$ qui exige, en effet, 10 évaluations numériques pour déterminer les α_r , 9 éliminations et 9 résolutions d'une équation quadratique pour déterminer les valeurs

$$A_2 = 649, \quad B_2 = 180.$$

¹ Algebra, herausgegeben von J. P. GRÜSON, t. II, p. 249; Berlin 1797.

Quant à la méthode de LAGRANGE, elle exige seulement le calcul des trois premières des réduites (8), parce que les formules (12) de l'article III donnent

$$\begin{aligned} B_1 &= z_4 = 2^2 + 1^2 = 5 \\ A_1 &= y_4 = 7 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18, \end{aligned}$$

et nous aurons donc, en vertu des formules récursives de LAGRANGE, que nous avons à étudier, dans l'article VII,

$$\begin{aligned} A_2 &= 2A_1^2 + 1 = 649 \\ B_2 &= 2A_1 B_1 = 180. \end{aligned}$$

VI. Des nombres ω_r et p_r .

Revenons maintenant aux positifs entiers p_r , définis heuristiquement par la formule (9) de l'article précédent, savoir

$$(1) \quad \omega_r z_{r+1} = p_r z_r + y_r.$$

A cet effet, supposons vraie cette formule, puis appliquons la définition des nombres ω_r , indiquée par la formule (9) de l'article II, savoir

$$(2) \quad y_r^2 - az_r^2 = (-1)^{r-1} \omega_r,$$

nous aurons

$$z_{r+1}(y_r^2 - az_r^2) = (-1)^{r-1}(p_r z_r + y_r),$$

ou, ce qui est la même chose

$$y_r(y_r z_{r+1} + (-1)^r) = z_r(az_r z_{r+1} - (-1)^r p_r).$$

Appliquons ensuite l'équation, fondamentale dans la théorie des fractions continues,

$$(3) \quad y_r z_{r+1} - z_r y_{r+1} = (-1)^{r+1},$$

il résulte, après un simple calcul,

$$(4) \quad y_r y_{r+1} - az_r z_{r+1} = (-1)^{r+1} p_r.$$

Inversement, définissons, par la formule (4), la suite des nombres p_r , puis cherchons, de (3) et (4), les valeurs de y_{r+1} et de z_{r+1} , nous trouvons, outre la formule (1), cette autre formule analogue à (1)

$$(5) \quad \omega_r y_{r+1} = p_r y_r + az_r,$$

de sorte qu'il ne nous reste qu'à démontrer que les nombres entiers p_r sont toujours positifs.

A cet effet, nous avons tout d'abord à démontrer deux propriétés des nombres entiers p_r , définis par la formule (4), savoir :

I. Les nombres p_r sont périodiques, parce que

$$(6) \quad p_{nk+r} = p_r, \quad 0 \leq r \leq k-3,$$

et les nombres p_r qui appartiennent à la même période sont symétriques, car

$$(7) \quad p_{k-r-3} = p_r, \quad 0 \leq r \leq k-3.$$

En effet, la formule (6) est une conséquence immédiate des formules générales (8) de l'article II, tandis que la formule (7) provient directement des formules (15) de l'article III, de sorte que la démonstration des formules (6) et (7) est parfaitement analogue à la démonstration des formules correspondantes pour les ω_r .

Cela posé, il nous reste seulement à démontrer que les p_{2r} sont toujours positifs. En effet, soit, dans (6), $n = 1$ et k et r des nombres impairs, il est évident que $k+r$ est pair. De même, soit, dans (7), k pair et r impair, le nombre $k-r-3$ est pair.

Démontrons maintenant que les p_{2r} sont toujours positifs.

A cet effet, nous posons, quel que soit l'indice r ,

$$\frac{y_{2r}}{z_{2r}} = \sqrt{a} - \varepsilon_{2r}, \quad \frac{y_{2r+1}}{z_{2r+1}} = \sqrt{a} + \varepsilon_{2r+1},$$

les nombres irrationnels ε_{2r} et ε_{2r+1} sont tous deux positifs, et nous aurons, en outre, $\varepsilon_{2r} > \varepsilon_{2r+1}$. Multiplions maintenant les deux formules susdites, il résulte

$$\frac{y_{2r} y_{2r+1}}{z_{2r} z_{2r+1}} - a = -(\varepsilon_{2r} - \varepsilon_{2r+1}) \sqrt{a - \varepsilon_{2r} \varepsilon_{2r+1}} < 0,$$

ou, ce qui est la même chose, les p_{2r} sont toujours positifs.

Or, l'existence des formules heuristiques (1) et (5) étant ainsi rigoureusement établie, les formules (2) et (4) montrent clairement l'analogie des deux suites formées des nombres ω_r et des nombres p_r .

Quant au nombre p_{k-2} , qui ne figure pas dans la formule (7), les équations (6) et (7) de l'article II, savoir

$$y_{k-1} = \alpha z_{k-1} + z_{k-2}, \quad \alpha z_{k-1} = \alpha y_{k-1} + y_{k-2},$$

donnent immédiatement

$$(8) \quad p_{k-2} = \alpha,$$

résultat qui est intéressant, nous le verrons dans ce qui suit.

Les nombres ω_r et p_r , introduits par la méthode de BROUNCKER, jouent un rôle intéressant dans la théorie de la fraction continue de LAGRANGE. Or, pour mettre en pleine lumière les propriétés fondamentales des nombres susdits, nous avons tout d'abord à démontrer la proposition:

II. Soit a une base quelconque, les deux valeurs $a = 3$ et $a = 8$ seulement exceptées, on aura toujours, quel que soit r ,

$$(9) \quad \omega_r < \frac{a}{2}.$$

On aura, en effet, en vertu de la définition de ω_r , savoir la formule (2),

$$\frac{\omega_r}{z_r^2} = \left| \frac{y_r^2}{z_r^2} - a \right| < \left| \frac{y_r^2}{z_r^2} - \frac{y_{r+1}^2}{z_{r+1}^2} \right|,$$

ce qui donnera

$$\omega_r < \frac{y_r z_{r+1} + z_r y_{r+1}}{z_{r+1}^2} < \frac{2y_{r+1}}{z_{r+1}}.$$

De plus, nous aurons évidemment

$$\frac{y_{r+1}}{z_{r+1}} < \sqrt{a} + \frac{1}{z_{r+1} z_{r+2}} \leq \sqrt{a} + \frac{1}{z_{r+2}} \leq \sqrt{a} + \frac{1}{2},$$

ce qui donnera

$$\omega_r < \frac{2y_{r+1}}{z_{r+1}} < 2\sqrt{a} + 1,$$

donc nous aurons certainement

$$\omega_r < \frac{a}{2},$$

pourvu que

$$2\sqrt{a} + 1 < \frac{a}{2}, \quad a > 4\sqrt{a} + 2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(\sqrt{a} - 2)^2 > 6, \quad \sqrt{a} - 2 > \sqrt{6},$$

savoir

$$a > 10 + 4\sqrt{6},$$

ce qui a certainement lieu pour $a \geq 20$, car $2\sqrt{6} < 5$.

Cela posé, il s'agit seulement des onze nombres

$$(10) \quad 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19,$$

car les nombres 2, 5, 10, 17, étant de la forme $\alpha^2 + 1$, ne donnent aucun nombre ω_r outre $\omega_0 = 1$.

Quant aux sept des nombres (10), savoir

$$(11) \quad 3, 6, 8, 11, 12, 15, 18,$$

ils sont contenus dans les expressions

$$\alpha^2 - 1, \alpha^2 + 2, \alpha^2 + \alpha,$$

et les périodes des fractions continues correspondantes ne contiennent que deux nombres, de sorte qu'il s'agit seulement du nombre ω_0 qui a les valeurs correspondantes

(11 bis) $2, 2, 4, 2, 3, 6, 2.$

De plus, les nombres 7 et 14 sont de la forme $\alpha^2 - 2$, et la fraction continue correspondante, savoir

$$\sqrt{\alpha^2 - 2} = [\alpha - 1, (1, \alpha - 2, 1, 2\alpha - 2)], \quad \alpha \geq 3,$$

a les deux premières réduites

$$\frac{\alpha - 1}{1}, \quad \frac{\alpha}{1},$$

ce qui donnera

$$\omega_0 = \omega_2 = 2\alpha - 3, \quad \omega_1 = 2,$$

et l'on aura, pour $\alpha \geq 3$,

$$\alpha^2 - 2 > 4\alpha - 6, \quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0; \quad \alpha^2 > 4.$$

Cela posé, il ne nous reste que les deux nombres 13 et 19, et la fraction continue

$$\sqrt{13} = [3, (1, 1, 1, 1, 6)]$$

donnera

$$\omega_0 = \omega_3 = 4, \quad \omega_1 = \omega_2 = 3,$$

tandis que nous aurons

$$\sqrt{19} = [4, (2, 1, 3, 1, 2, 8)],$$

et les valeurs de ω_r deviennent

$$\omega_0 = \omega_4 = 3, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_1 = \omega_3 = 5.$$

Ces calculs faits, on voit, en vertu de (11) et (11 bis), que les nombres (10) donnent seulement deux exceptions de l'inégalité (9), savoir $a = 3$, $\omega_0 = 2$ et $a = 8$, $\omega_0 = 4$.

L'inégalité fondamentale (9) ainsi établie, nous avons à revenir aux nombres p_r .

A cet effet, multiplions par az_{r+1} , respectivement par y_{r+1} les formules (1) et (5), puis soustrayons les deux équations ainsi obtenues, nous aurons la formule curieuse

$$(12) \quad \omega_r \omega_{r+1} = a - p_r^2,$$

ce qui donnera, quel que soit l'indice r ,

$$(13) \quad p_r < \sqrt{a},$$

et nous avons donc la proposition :

III. Soit a une base quelconque, on aura toujours, quel que soit l'indice r ,

$$(14) \quad p_r \leq \alpha.$$

Quant à ce dernier résultat, la formule (8) montre que p_r peut avoir la valeur maximum α .

En second lieu, éliminons de (1) et (5) et de l'expression de ω_{r+1} les y_{r+1} et les z_{r+1} , en appliquant les formules récursives ordinaires, nous aurons respectivement

$$(15) \quad p_r + p_{r-1} = \alpha_r \omega_r$$

$$(16) \quad \omega_{r+1} - \omega_{r-1} = 2\alpha_r p_{r-1} - \alpha_r^2 \omega_r,$$

d'où il résulte, en éliminant ω_r ,

$$(17) \quad \omega_{r+1} - \omega_{r-1} = \alpha_r (p_{r-1} - p_r).$$

Appliquons maintenant les inégalités (14), puis remarquons que $\omega_r \geq 2$, nous aurons la proposition :

IV. Soit k le nombre caractéristique de la base a , on aura, dans la fraction continue, infinie et périodique,

$$\sqrt{a} = [\alpha, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, 2\alpha)],$$

constamment

$$(18) \quad \alpha_r \leq \alpha, \quad 1 \leq r \leq k-1.$$

Revenons encore une fois à la définition des ω_r , savoir la formule (2), puis appliquons la formule (16) de l'article III, nous aurons la proposition curieuse :

V. Soit a une base de première espèce ayant le nombre caractéristique $k > 1$, on aura constamment

$$(19) \quad y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{k-2}^2 = a(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{k-2}^2).$$

Soit, au contraire, la base a de seconde espèce, ayant le nombre caractéristique $k = 2\mu$, on aura, en vertu de (2),

$$(20) \quad \sum_{r=0}^{r=\mu-2} y_r^2 - a \sum_{r=0}^{r=\mu-2} z_r^2 = (-1)^\mu \omega_{\mu-1} + 2 \sum_{r=0}^{r=\mu-2} (-1)^{r+1} \omega_r,$$

où il faut supposer naturellement $\mu \geq 2$, tandis que l'on aura, pour $\mu = 1$,

$$(20 \text{ bis}) \quad y_0^2 - az_0^2 = -\omega_0.$$

Quant à la différence qui figure au premier membre de (20), je ne me rappelle pas avoir vu un seul cas, où elle est positif ou zéro, mais j'ignore complètement les propriétés générales de cette différence.

CHAPITRE II

Propriétés générales des solutions.

VII. Formules d'addition et formules logarithmiques.

Revenons maintenant aux formules (8) et (8 bis) de l'article II, savoir les formules récursives

$$(1) \quad \begin{cases} y_{nk+r} = A_n y_r + a B_n z_r \\ z_{nk+r} = A_n z_r + B_n y_r \end{cases}$$

et les formules inverses

$$(2) \quad \begin{cases} y_r = (-1)^{nk} (A_n y_{nk+r} - a B_n z_{nk+r}) \\ z_r = (-1)^{nk} (A_n z_{nk+r} - B_n y_{nk+r}), \end{cases}$$

il est évident que les formules (1) permettent de déterminer les numérateurs et les dénominateurs appartenant à une période quelconque de la fraction continue

$$(3) \quad \sqrt{a} = [\alpha, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1}, 2\alpha)],$$

où k est le nombre caractéristique de la base a , pourvu que les nombres susdits, appartenant à la première période, et les solutions A_n et B_n de l'équation correspondante de FERMAT soient connus.

Soit maintenant $r = pk - 1$, où p est un positif entier quelconque, on aura les formules récursives, dues à LA-GRANGE¹,

$$(4) \quad \begin{cases} A_{n+p} = A_n A_p + a B_n B_p \\ B_{n+p} = A_n B_p + B_n A_p \end{cases}$$

¹ Mémoires de l'Académie de Berlin 1767, p. 174—176 (1769).

et les formules inverses

$$(5) \quad \begin{cases} A_p = (-1)^{nk} (A_n A_{n+p} - a B_n B_{n+p}) \\ B_p = (-1)^{nk} (A_n B_{n+p} - B_n A_{n+p}), \end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $r = pk - 2$ donnera

$$(6) \quad \begin{cases} a_{n+p} = A_n a_p + a B_n b_p \\ b_{n+p} = A_n b_p + B_n a_p \end{cases}$$

et les formules inverses

$$(7) \quad \begin{cases} a_p = (-1)^{nk} (A_n a_{n+p} - a B_n b_{n+p}) \\ b_p = (-1)^{nk} (A_n b_{n+p} - B_n a_{n+p}). \end{cases}$$

Cela posé, les formules (4) donnent immédiatement, par la conclusion de m à $m + 1$, ces autres formules générales, également dues à LAGRANGE¹,

$$(8) \quad (A_r \pm \sqrt{a} B_r)^n = A_{nr} \pm \sqrt{a} B_{nr},$$

savoir

$$(9) \quad \begin{cases} A_{nr} = \frac{(A_r + \sqrt{a} B_r)^n + (A_r - \sqrt{a} B_r)^n}{2} \\ B_{nr} = \frac{(A_r + \sqrt{a} B_r)^n - (A_r - \sqrt{a} B_r)^n}{2\sqrt{a}}; \end{cases}$$

de plus, on aura, en appliquant la formule binomiale,

$$(10) \quad \begin{cases} A_{nr} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} A_r^{n-2s} B_r^{2s} a^s \\ B_{nr} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2s+1} A_r^{n-2s-1} B_r^{2s+1} a^s. \end{cases}$$

Or, ces deux dernières formules donnent immédiatement

¹ Loc. cit. pp. 226, 229.

deux propositions qui sont essentielles dans les recherches qui nous occupent ici, savoir:

I. Soit r et n des positifs entiers quelconques, B_{nr} est toujours divisible par B_r .

II. Tous les nombres A_{2nr+r} sont divisibles par A_r , tandis que A_{2nr} est toujours premier avec A_r .

On voit que le théorème I et la première partie du théorème II sont des conséquences immédiates des formules (10). Quant aux nombres A_{2nr} , on aura, en vertu de la première des formules (10), une expression de la forme

$$A_{2nr} = KA_r^2 + a^n B_r^{2n},$$

où K est un positif entier, et la formule

$$(11) \quad A_r^2 - aB_r^2 = (-1)^{rk}$$

montre clairement que A_r est premier et avec a et avec B_r .

Soit particulièrement $r = 1$, on voit que B_n est toujours divisible par B_1 , et que A_{2n+1} est toujours divisible par A_1 .

De plus, il est évident que les deux théorèmes susdits sont valables, quels que soient, dans (8), les positifs entiers A_r et B_r .

La publication la plus ancienne, où je me rappelle avoir vu le théorème I, est de GENOCCHI¹, mais, chose curieuse, dans l'«*Educational Times*»², on a proposé de démontrer que les B_{2n} sont divisibles par B_1 , et les B_{2n+1} ?

Posons maintenant, dans (4), $p = n$, il résulte

$$(12) \quad A_{2n} = A_n^2 + aB_n^2, \quad B_{2n} = 2A_nB_n,$$

d'où, en vertu de (11),

$$(13) \quad A_{2n} = 2A_n^2 - (-1)^{nk} = 2aB_n^2 + (-1)^{nk},$$

ce qui donnera

¹ *Annali di Mathematica* (2) t. 2, p. 256—257; 1868.

² *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. 7 (1875), p. 96.

$$(14) \quad A_{2n} + (-1)^{nk} = 2A_n^2, \quad A_{2n} - (-1)^{nk} = 2aB_n^2.$$

Cela posé, soit a une base de première espèce, il résulte, en vertu de (12) et (13), que les plus petites solutions, x_1 et y_1 , de l'équation

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

savoir A_2 et B_2 , se présentent nécessairement sous la forme

$$x_1 = 2n^2 + 1, \quad y_1 = 2nr.$$

Or, M. B. NIEWENGLOUSKI¹ a démontré que cette condition nécessaire est suffisante aussi, afin que a soit une base de première espèce, savoir que l'équation

$$x^2 - ay^2 = -1$$

soit résoluble en positifs entiers.

Revenons maintenant aux formules (1), puis remplaçons n par $2n$, il résulte, en vertu de la première des formules (14),

$$\begin{aligned} y_{2nk+r} + (-1)^{nk} y_r &= 2A_n^2 y_r + 2aA_n B_n z_r \\ z_{nk+r} + (-1)^{nk} z_r &= 2A_n^2 z_r + 2A_n B_n y_r, \end{aligned}$$

ce qui donnera immédiatement

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{2nk+r} + (-1)^{nk} y_r = 2A_n y_{nk+r} \\ z_{2nk+r} + (-1)^{nk} z_r = 2A_n z_{nk+r}, \end{array} \right.$$

et l'on aura, en vertu de la dernière des formules (14), ces deux équations analogues aux précédentes

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{2nk+r} - (-1)^{nk} y_r = 2aB_n z_{nk+r} \\ z_{2nk+r} - (-1)^{nk} z_r = 2B_n y_{nk+r}. \end{array} \right.$$

Cela posé, appliquons la proposition I, il résulte, en vertu de la première des formules (16), cette autre proposition:

¹ Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 35, p. 126—131; 1907.

III. Soit r un indice quelconque, on aura toujours

$$(27) \quad y_{2nk+r} \equiv (-1)^{nk} y_r \pmod{2aB_1}.$$

Soit maintenant, dans les formules (15) et (16), $r = pk - 1$, il résulte

$$(18) \quad \begin{cases} A_{2n+p} + (-1)^{nk} A_p = 2A_n A_{n+p} \\ B_{2n+p} + (-1)^{nk} B_p = 2A_n B_{n+p} \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} A_{2n+p} - (-1)^{nk} A_p = 2aB_n B_{n+p} \\ B_{2n+p} - (-1)^{nk} B_p = 2B_n A_{n+p}, \end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $r = pk - 2$ donnera de même

$$(20) \quad \begin{cases} a_{2n+p} + (-1)^{nk} a_p = 2A_n a_{n+p} \\ b_{2n+p} + (-1)^{nk} b_p = 2A_n b_{n+p} \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} a_{2n+p} - (-1)^{nk} a_p = 2aB_n b_{n+p} \\ b_{2n+p} - (-1)^{nk} b_p = 2B_n a_{n+p}. \end{cases}$$

On voit que l'analogie entre les formules développées, pour les A_n et les B_n , et les formules fondamentales de la Trigonométrie est parfaite.

En effet, les formules (4) et (5) correspondent aux formules d'addition de $\cos(x \pm y)$ et de $\sin(x \pm y)$; de même, la formule (8) correspond à la formule de MOIVRE, tandis que les formules (18) et (19) sont analogues aux formules logarithmiques obtenues pour les expressions $\cos x \pm \cos y$ et $\sin x \pm \sin y$.

Or, dans l'article XII, nous avons à démontrer que cette analogie des formules susdites est une identité, parce que les A_n et les B_n sont, quelle que soit la base a , intimement liés aux polynomes de CAUCHY.

VIII. Des nombres A_n et a_n .

Il est évident que les formules démontrées dans l'article précédent, donnent une suite de résultats intéressants concernant les nombres A_n et B_n .

Étudions tout d'abord les A_n , la première des formules (12) de l'article précédent, savoir

$$(1) \quad A_{2n} = A_n^2 + aB_n^2,$$

donnera immédiatement la proposition:

I. Le nombre $-a$ est résidu quadratique de tous les facteurs premiers de A_{2n} .

Appliquons ensuite la formule

$$(2) \quad A_{2n} = 2A_n^2 - (-1)^{nk},$$

tirée directement de (1), il résulte de même:

II. Soit a une base de première espèce, et soit donc k un nombre impair, les facteurs premiers des A_{4n} sont tous de la forme $8\nu \pm 1$, tandis que les facteurs premiers des A_{4n+2} sont de la forme $8\nu + 1$ ou $8\nu + 3$.

III. Soit a une base de seconde espèce, et soit donc k un nombre pair, les facteurs premiers des A_{2n} sont tous de la forme $8\nu \pm 1$.

Appliquons ensuite les formules (14) et (19) de l'article précédent, savoir

$$A_{2n} - (-1)^{nk} = 2aB_n^2$$

$$A_{2n+1} - (-1)^{nk}A_1 = 2aB_nB_{n+1},$$

puis remarquons que les B_m sont tous divisibles par B_1 , nous aurons:

IV. Les nombres A_m satisfont, quelle que soit la bas a , aux congruences

$$(3) \quad \begin{cases} A_{2n} \equiv (-1)^{nk} & (\text{mod } 2aB_1^2) \\ A_{2n+1} \equiv (-1)^{nk} A_1 & (\text{mod } 2aB_1^2). \end{cases}$$

Or, il est bien curieux, ce me semble, que les nombres a_n , savoir les y_{nk-2} , satisfassent à des congruences analogues à (3).

En effet, la première des formules (21) de l'article précédent donnera, pour $p = 1$,

$$a_{2n+1} - (-1)^{nk} a_1 = 2aB_1 b_{n+1};$$

appliquons ensuite la formule (7) de l'article II, savoir

$$aB_m = \alpha A_m + a_m,$$

il résulte pour $m = 2n$,

$$2aA_n B_n = (A_{2n} \pm (-1)^{nk}) \alpha + (a_{2n} \pm (-1)^{nk} \alpha),$$

et nous aurons donc, en vertu du théorème précédent:

V. Les nombres $a_m = y_{mk-2}$ satisfont, quelle que soit la base a , aux congruences

$$(4) \quad \begin{cases} a_{2n} \equiv (-1)^{nk-1} \alpha & (\text{mod } 2aB_1) \\ a_{2n+1} \equiv (-1)^{nk} a_1 & (\text{mod } 2aB_1). \end{cases}$$

La première de ces deux congruence est bien remarquable en comparaison avec la congruence (14) de l'article II.

Quant aux deux derniers théorèmes, il est évident que les deux congruences contenant les A_m et les a_m présentent une différence essentielle, selon que la base a est de première ou de seconde espèce.

En effet, soit a une base de première espèce, et soit donc le nombre caractéristique k impair, nous connaissons dès à présent le reste modulo $2aB_1$ de tous les x et de tous les a_m , tirés de l'équation

$$(5) \quad x^2 - ay^2 = 1.$$

Soit, au contraire, a une base de seconde espèce, et soit donc le nombre caractéristique k pair, nous ne connaissons dès à présent que les restes modulo $2aB_1$ des A_{2n} et des a_{2n} tirés de l'équation correspondante (5). Quant aux restes des A_{2n+1} et des a_{2n+1} , il ne sont pas généralement égaux à ± 1 ou à $\pm \alpha$, mais ces restes fixes se présentent certainement dans le cas spécial, où la base a est une puissance impaire d'un nombre premier impair, cas spécial que nous avons à étudier plus amplement ici.

A cet effet, remarquons tout d'abord que LEGENDRE¹ a démontré qu'un nombre premier de la forme $4\nu + 1$ est toujours une base de première espèce, nous avons à généraliser, dans l'article X, ce théorème, en démontrant que la puissance

$$(6) \quad a = (4\nu + 1)^{2q+1}, \quad q \geq 0,$$

a la même propriété. De plus, nous démontrerons directement, dans l'article XXIII, que la puissance (6) du nombre premier $4\nu + 1$ est toujours une base de première espèce.

Cela posé, il résulte immédiatement des théorèmes IV et V:

VI. Pour la base $a = (4\nu + 1)^{2q+1}$, où $4\nu + 1$ est un nombre premier, on aura les congruences

$$(7) \quad \begin{cases} A_{2n} \equiv (-1)^n & (\text{mod } a) \\ a_{2n} \equiv (-1)^{n-1} \alpha & (\text{mod } a) \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} A_{2n+1} \equiv (-1)^n A_1 & (\text{mod } a) \\ a_{2n+1} \equiv (-1)^n a_1 & (\text{mod } a). \end{cases}$$

Quant au nombre premier $4\nu + 3$, il est toujours une base de seconde espèce, parce qu'il ne peut jamais diviser la somme $x^2 + 1$, et il est évident que la puissance

¹ Théorie des Nombres, t. I, p. 65; 3^e édition, Paris 1830.

$$(9) \quad a = (4\nu + 3)^{2q+1} \quad q \geq 0,$$

est aussi une base de seconde espèce.

Or, dans ce cas, l'équation de FERMAT

$$(A_1 + 1)(A_1 - 1) = aB_1^2$$

donnera une congruence de la forme

$$(10) \quad A_1 \equiv (-1)^\varepsilon \pmod{a},$$

où l'exposant ε est facile à déterminer. En effet, il résulte, en vertu de la première des formules (23) de l'article IV,

$$y_{\mu-1}^2 + (-1^\nu - (-1)^\varepsilon) \equiv 0 \pmod{a},$$

tandis que la première des formules (25) de l'article IV donnera

$$y_{\mu-1}^2 + (-1)^\nu 2 \equiv 0 \pmod{a}.$$

Cela posé, on aura pour l'exposant ε qui figure dans la congruence (10)

$$\varepsilon = \nu - 1.$$

Appliquons ensuite l'identité

$$aB_1 = (A_1 + (-1)^\nu)\alpha + (a_1 - (-1)^\nu\alpha),$$

tirée directement de la formule (7) de l'article II, nous aurons cet autre théorème, supplémentaire au précédent:

VII. Pour la base $a = (4\nu + 3)^{2q+1}$, où $4\nu + 3$ est un nombre premier, on aura les congruences

$$(11) \quad \begin{cases} A_n \equiv (-1)^{n\nu+n} \pmod{a} \\ a_n \equiv (-1)^{n\nu+n-1}\alpha \pmod{a}. \end{cases}$$

IX. Des nombres B_n .

Les nombres B_n qui correspondent à une base quelconque, savoir les valeurs de y , tirées de l'équation de FERMAT

$$(1) \quad x^2 - ay^2 = \pm 1,$$

présentent un intérêt particulier, parce qu'ils admettent un algorithme analogue à celui de la division ordinaire, mais notamment parce qu'ils donnent naissance aux rangs des nombres entiers, essentiels dans la théorie de l'équation de FERMAT,

Quant aux formules de ce genre, en partie déjà connues, et aux autres que nous avons à déduire, nous prenons pour point de départ l'équation de FERMAT, analogue à (1),

$$(2) \quad u^2 - ap^2v^2 = \pm 1,$$

ou p désigne un positif entier quelconque, équation déjà mentionnée dans l'article I, afin d'établir qu'un positif entier quelconque divise une infinité des nombres B_n , problème que nous avons à étudier plus amplement dans l'article présent et dans celui qui suit.

A cet égard, nous avons tout d'abord à introduire une définition qui facilite les démonstrations, en simplifiant la terminologie.

En effet, soit p un positif entier quelconque, et soit B_r le plus petit des nombres B_m qui soit divisible par p , nous disons que p est, pour la base a , du rang r .

Soient maintenant

$$(3) \quad u = \alpha_1, \quad v = \beta_1$$

les plus petites solutions en positifs entiers de l'équation (2), il existe, en vertu de (1), un indice r , tel que

$$(4) \quad \alpha_1 = A_r, \quad p\beta_1 = B_r,$$

et p est donc du rang r , parce que p ne peut diviser aucun B_m plus petit que B_r .

Remarquons ensuite que les solutions générales α_n et β_n de l'équation (2) se déterminent par la formule

$$(\alpha_1 \pm p\sqrt{a}\beta_1)^n = \alpha_n \pm p\sqrt{a}\beta_n,$$

ce qui n'est, en vertu de (4), autre chose que celle-ci

$$(A_r \pm \sqrt{a}B_r)^n = A_{nr} \pm \sqrt{a}B_{nr},$$

donc nous aurons, quel que soit l'indice n ,

$$(5) \quad \alpha_n = A_{nr}, \quad p\beta_n = B_{nr},$$

ce qui donnera le théorème essentiel:

I. Soit le positif entier p , quelconque du reste, du rang r pour la base a , les B_{nr} représentent l'ensemble des B_m qui sont divisibles par p , et les solutions générales de l'équation (2) sont déterminées par les formules (5).

Appliquons maintenant les formules récursives de LA GRANGE

$$\begin{aligned} B_{m+n} &= A_n B_m + B_n A_m \\ (-1)^{nk} B_{m-n} &= A_n B_m - B_n A_m, \end{aligned}$$

où k est le nombre caractéristique de la base a , nous aurons immédiatement les deux propositions suivantes:

II. Un diviseur commun de B_m et de B_n est aussi diviseur des deux nombres B_{m+n} .

III. Soit f le plus grand commun diviseur des indices m et n , un diviseur commun quelconque des nombres B_m et B_n est aussi diviseur de B_f .

En effet, soit tout d'abord m divisible par n , n est le plus grand commun diviseur de m et n , et la proposition est évidente.

Soit ensuite

$$m = nq + s, \quad 0 < s < n,$$

et soit p un diviseur commun de B_m et B_n , il résulte, en vertu de I et II, que p est aussi diviseur de B_s , et ainsi de suite.

Cela posé, nous aurons de plus la proposition:

IV. Soient r et s les rangs de p et de q , et soit n le plus petit commun multiple de r et s , le produit pq est du rang n .

Soit, en effet, B_m divisible et par p et par q , l'indice m est aussi divisible et par r et par s , et il est évident que le produit pq est du rang n .

Remarquons ensuite que B_r est le plus grand de tous les nombres du rang r , il résulte, en vertu de II, III, IV:

V. Soit B_m divisible par B_n , l'indice m est divisible par l'indice n , et inversement.

VI. Soit M le plus petit commun multiple des indices m et n , le produit $B_m B_n$ est du rang M .

VII. Soit f le plus grand commun diviseur des indices m et n , B_f est le plus grand commun diviseur de B_m et B_n .

Quelques-uns de ces théorèmes concernant les nombres B_m et B_n sont bien connus,¹ mais on ne semble pas avoir remarqué jusqu'ici qu'ils sont des cas particuliers d'autres théorèmes beaucoup plus généraux.

Quant à la base a , nous aurons à démontrer le théorème:

VIII. Le diviseur p de la base a est précisément du rang p , pourvu que p et B_1 soient premiers entre eux.

En effet, soit, dans la dernière des formules (10) de l'article VIII, $r = 1$, on aura une expression de la forme

$$B_n = nA_1^{m-1}B_1 + aK,$$

où K est un positif entier. Or, remarquons que p est premier et avec A_1 et avec B_1 , il est évident que B_n n'est

¹ Voir P. BACHMANN: *Niedere Zahlentheorie*, t. II, p. 80; Leipzig 1910.

divisible par p que dans le cas, où n est divisible par p ; c'est-à-dire que p est précisément du rang p .

Nous avons encore à démontrer un théorème essentiel concernant les nombres A_m , savoir:

IX. La nombre A_r , supposé plus grand que l'unité, est du rang $2r$, et les nombres B_{2nr} et A_{2nr+r} représentent les ensembles des nombres B_m et A_m qui sont divisibles par A_r .

La formule

$$B_{2r} = 2A_r B_r$$

montre clairement que B_{2r} est toujours divisible par A_r . Supposons maintenant que B_m , où $m < 2r$, soit divisible par A_r , nous aurons nécessairement $m > r$, parce que $A_r > B_r$. Soit ensuite $m = r + s$, on aura donc $0 < s < r$, et la formule

$$B_{r+s} = B_r A_s + A_r B_s,$$

où A_r et B_r sont premiers entre eux, montre clairement que A_s est divisible par A_r , pourvu que B_{r+s} le soit, ce qui est impossible.

Cela posé, il ne nous reste évidemment qu'à démontrer que les A_{2nr+r} sont les seuls nombres A_m qui soient divisibles par A_r .

Or, nous savons déjà, d'après le théorème II de l'article VII, que les A_{2nr+r} sont tous divisibles par A_r . Soit ensuite A_m divisible par A_r , je dis que le nombre A_{m+s} , où $0 < s < 2r$, ne peut jamais être divisible par A_r , ce qui est une conséquence immédiate de la formule

$$A_{m+s} = A_m A_s + a B_m B_s,$$

parce que A_r est premier et avec a et avec B_m ; du plus A_r est du rang $2r$, de sorte que B_s ne peut pas être divisible par A_r .

X. Du rang d'un nombre entier.

Le rang d'un positif entier que nous venons d'introduire, dans l'article précédent, joue un rôle si important dans la théorie de l'équation de FERMAT qu'il nous semble utile de développer une suite de théorèmes concernant cette idée.

I. Soit m le rang du nombre premier p , et soit B_m divisible précisément par p^q , la puissance p^r , où $r > q$, est du rang mp^{r-q} .

La dernière des formules (10) de l'article VII se présentant sous la forme

$$(1) \quad B_{mn} = B_m (nA_m^{n-1} + B_m^2 K),$$

où K est un positif entier, il est évident que B_{mn} n'est divisible par p^{q+1} que dans le cas, où n est divisible par p ; c'est-à-dire que p^{q+1} est du rang mp . Remplaçons maintenant, dans (1), m par mp , il résulte que p^{q+2} est du rang mp^2 , et ainsi de suite.

Mais comment déterminer les deux nombres m et q , parfaitement définis, pourvu que a et p soient donnés?

On aura immédiatement, comme corollaire du théorème I, la proposition:

II. Soit le nombre premier impair p du rang impair, une puissance quelconque de p est aussi du rang impair.

Considérons maintenant une base a de première espèce, puis supposons que le positif entier p soit du rang m , les deux nombres

$$C_1 = A_m, \quad D_1 = \frac{B_m}{p}$$

satisfont à l'équation de FERMAT

$$C_1^2 - (ap^2) D_1^2 = (-1)^m,$$

ce qui donnera le théorème:

III. Soit a une base de première espèce, le nombre ap^2 est une base de première ou de seconde espèce, selon que le rang de p est un nombre impair ou pair.

On aura, comme corollaire de ce théorème, la proposition:

IV. Soit a une base de première espèce, le nombre aB_{2n+1}^2 a toujours la même propriété, tandis que tous les nombres aA_n^2 sont des bases de seconde espèce.

En se rappelant que LEGENDRE¹ a démontré qu'un nombre premier de la forme $4\nu + 1$ est toujours une base de première espèce, il résulte, en vertu de II, un théorème essentiel que nous venons de mentionner, dans l'article VIII, et que nous avons à démontrer, d'un autre point de vue, dans l'article XXIII, savoir:

V. Soit $4\nu + 1$ un nombre premier, la puissance $(4\nu + 1)^{2\varrho+1}$ est toujours une base de première espèce.

En effet, soit $a = 4\nu + 1$, on voit, en vertu de la formule

$$B_n = nA_1^{n-1}B_1 + aK,$$

appliquée dans l'article précédent, que a est ou du rang 1 ou du rang $4\nu + 1$, de sorte que le rang de a est toujours un nombre impair.

VI. Un nombre du rang impair ne peut diviser aucun des nombres A_m , de sorte que deux nombres A_m et B_{2n+1} sont toujours premiers entre eux, quels que soient leurs indices.

Soit $2r + 1$ le rang de p , et soit A_m divisible par p , il est évident que B_{2m} est aussi divisible par p , de sorte que

¹ Théorie des Nombres, t. I, p. 65; 3^e édition; Paris 1830.

$2m$, savoir m , est nécessairement divisible par $2r+1$, ce qui entraîne que B_m soit divisible par p , supposition impossible, parce que A_m et B_m sont premiers entre eux.

Cela posé, il est évident qu'un nombre premier qui divise B_{2n+1} ne peut diviser aucun A_m .

VII. Soit p un nombre premier impair, et soit la puissance p^ϱ du rang pair $2r$, les B_{2nr} et les A_{2nr+r} représentent l'ensemble des A_m et des B_m qui sont divisibles par p^ϱ .

Il est évident que B_r ne peut pas être divisible par p^ϱ , parce que cette puissance est du rang $2r$; soit donc B_r divisible par $p^{\varrho-\sigma}$, il résulte, en vertu de la formule

$$B_{2r} = 2A_r B_r,$$

que A_r est divisible par p^σ , ce qui est impossible, parce que A_r et B_r sont premiers entre eux; c'est-à-dire que B_r ne peut pas être divisible par p , donc A_r est divisible par p^ϱ , et les A_{2nr+r} sont tous divisibles par A_r .

VIII. Soit a une base de première espèce, un nombre de la forme $4\nu+3$ est toujours du rang pair.

En effet, un nombre de la forme $4\nu+3$ contient au moins un facteur premier de la même forme, et un tel nombre premier ne peut jamais diviser la somme x^2+1 .

CHAPITRE III

Les polynomes de Cauchy et l'équation de Fermat.

XI. De la base $a = \alpha^2 + 1$.

Soit particulièrement, dans l'équation de FERMAT,

$$(1) \quad x^2 - ay^2 = \pm 1,$$

$B_1 = 1$, plusieurs des théorèmes de l'article IX se présentent sous une forme très simple.

On aura par exemple, en vertu du théorème VII de l'article susdit:

I. Soient les deux indices n et p premiers entre eux, les deux nombres B_n et B_p auront la même propriété, et inversement.

De plus, le théorème VIII de l'article IX donnera:

II. Un diviseur quelconque p de la base a est précisément du rang p .

Quant à l'équation (1) qui est satisfaite par $y = 1$, il est évident que la base a se présente sous la forme

$$(2) \quad a = \alpha^2 \pm 1,$$

où α est la valeur positive entière de x qui correspond à $y = 1$.

Cela posé, nous avons tout d'abord à étudier la valeur $\alpha^2 + 1$; la fraction continue correspondante, savoir

$$(3) \quad \sqrt{\alpha^2 + 1} = [\alpha, (2\alpha)], \quad \alpha \geq 1,$$

a les réduites

$$(4) \quad \frac{\alpha}{1}, \frac{2\alpha^2+1}{2\alpha}, \frac{4\alpha^3+3\alpha}{4\alpha^2+1}, \frac{8\alpha^4+8\alpha^2+1}{8\alpha^3+4\alpha}, \dots,$$

dont les numérateurs $\varphi_n(\alpha)$ et les dénominateurs $\psi_n(\alpha)$ représentent, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, l'ensemble des polynômes entiers qui satisfont à l'identité algébrique

$$(5) \quad \varphi_n^2(\alpha) - (\alpha^2 + 1) \psi_n^2(\alpha) = (-1)^n.$$

De plus, la définition même des polynômes $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$ donnera les formules récursives

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_n(\alpha) = 2\alpha \varphi_{n-1}(\alpha) + \varphi_{n-2}(\alpha) \\ \psi_n(\alpha) = 2\alpha \psi_{n-1}(\alpha) + \psi_{n-2}(\alpha), \end{cases}$$

d'où il résulte, par la conclusion de n à $n+1$, ces autres identités

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_{n+1}(\alpha) + \psi_{n-1}(\alpha) = 2\varphi_n(\alpha) \\ \psi_{n+1}(\alpha) - \psi_{n-1}(\alpha) = 2\alpha \psi_n(\alpha) \end{cases}$$

$$(8) \quad \varphi_n(\alpha) \pm \alpha \psi_n(\alpha) = \psi_{n+1}(\alpha).$$

Appliquons ensuite les formules générales, développées dans l'article III, nous aurons

$$(9) \quad \varphi_{2n}(\alpha) = 2\varphi_n^2(\alpha) - (-1)^n$$

$$(10) \quad \psi_{2n}(\alpha) = 2\varphi_n(\alpha)\psi_n(\alpha).$$

Quant aux polynômes $\varphi_{2n+1}(\alpha)$ et $\psi_{2n+1}(\alpha)$, remarquons que les formules récursives (6) se présentent sous la forme

$$\varphi_n(\alpha) = \psi_2(\alpha) \varphi_{n-1}(\alpha) + \psi_1(\alpha) \varphi_{n-2}(\alpha)$$

$$\psi_n(\alpha) = \psi_2(\alpha) \psi_{n-1}(\alpha) + \psi_1(\alpha) \psi_{n-2}(\alpha),$$

la conclusion de p à $p+1$ donnera les formules générales

$$\varphi_n(\alpha) = \psi_p(\alpha) \varphi_{n-p+1}(\alpha) + \psi_{p-1}(\alpha) \varphi_{n-p}(\alpha)$$

$$\psi_n(\alpha) = \psi_p(\alpha) \psi_{n-p+1}(\alpha) + \psi_{p-1}(\alpha) \psi_{n-p}(\alpha),$$

d'où, en posant $n = m + p$,

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_{m+p}(\alpha) = \psi_p(\alpha) \varphi_{m+1}(\alpha) + \psi_{p-1}(\alpha) \varphi_m(\alpha) \\ \psi_{m+p}(\alpha) = \psi_p(\alpha) \psi_{m+1}(\alpha) + \psi_{p-1}(\alpha) \psi_m(\alpha). \end{cases}$$

Soit particulièrement $p = m + 1$, il résulte, en vertu de (11), si nous remplaçons m par n ,

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi_{2n+1}(\alpha) = \varphi_{n+1}(\alpha) \psi_{n+1}(\alpha) + \varphi_n(\alpha) \psi_n(\alpha) \\ \psi_{2n+1}(\alpha) = \psi_{n+1}^2(\alpha) + \psi_n^2(\alpha), \end{cases}$$

formules qui correspondent aux deux premières des formules (12 bis) de l'article III. Quant à la troisième de ces formules, elle devient ici

$$(12 \text{ bis}) \quad (\alpha^2 + 1) \psi_{2n+1}(\alpha) = \varphi_{n+1}^2(\alpha) + \varphi_n^2(\alpha),$$

d'où, en vertu de (9),

$$(13) \quad 2(\alpha^2 + 1) \psi_{2n+1}(\alpha) = \varphi_{2n+2}(\alpha) + \varphi_{2n}(\alpha),$$

savoir la première des formules logarithmiques (19) de l'article VII.

Multiplions ensuite les deux formules (7), il résulte

$$(14) \quad 2\alpha \psi_{2n}(\alpha) = \psi_{n+1}^2(\alpha) - \psi_{n-1}^2(\alpha),$$

tandis que l'identité (5), écrite sous la forme

$$(\varphi_n(\alpha) + \alpha \psi_n(\alpha)) (\varphi_n(\alpha) - \alpha \psi_n(\alpha)) = \psi_n^2(\alpha) + (-1)^n,$$

donnera, en vertu des formules (8),

$$(15) \quad \psi_{n+1}(\alpha) \psi_{n-1}(\alpha) = \psi_n^2(\alpha) + (-1)^n,$$

d'où, en supposant n pair, puis remplaçant n par $2n$:

III. Soit α un positif entier quelconque, le produit

$$(16) \quad \psi_{2n+1}(\alpha) \psi_{2n-1}(\alpha) = \psi_{2n}^2(\alpha) + 1$$

est toujours une base de première espèce, et les solutions générales de l'équation de correspon-

dante de Fermat se présentent sous la forme

$$(17) \quad A_m = \varphi_m(\beta), B_m = \psi_m(\beta), \beta = \psi_{2n}(\alpha).$$

Remarquons, en passant, qu'on cherchera en vain à démontrer que le nombre $\psi_{2n+1}(\alpha)$ est toujours une base de première espèce, parce qu'il peut arriver que $\psi_{2n+1}(\alpha)$ soit un carré, nous le verrons par exemple dans l'article XIX.

Appliquons ensuite, au premier membre de (16), la dernière des formules (12), il résulte, après un simple calcul,

$$\begin{aligned} (\psi_{n+1}(\alpha) \pm \psi_{n-1}(\alpha))^2 \psi_n^2(\alpha) + (\psi_{n+1}(\alpha) \psi_{n-1}(\alpha) \pm \psi_n^2(\alpha))^2 &= \\ &= \psi_{2n}^2(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

On voit, en vertu des formules (7) et (15), que les signes supérieurs donnent une identité formelle, tandis qu'il résulte, en vertu de (7), pour les signes inférieurs, la formule curieuse

$$(18) \quad 4\alpha^2 \psi_n^4(\alpha) + (2\psi_n^2(\alpha) + (-1)^n)^2 = \psi_{2n}^2(\alpha) + 1,$$

qui se présente, dans le cas spécial $\alpha = 1$, et seulement dans ce cas, sous une forme très élégante. Dans l'article XVIII nous avons à citer la formule singulière ainsi obtenue.

Quant à la dernière des formules (12), remarquons que CATALAN¹ a démontré que, dans l'équation indéterminée

$$(\alpha^2 + 1)x^2 = y^2 + 1,$$

le nombre x est toujours la somme de trois carrés. On aura, en effet,

$$x = \psi_{4n+1}(\alpha) = \psi_{2n+1}^2(\alpha) + \psi_{2n}^2(\alpha),$$

¹ Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. 37, p. 49—114; 1885. Citation d'après le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 17 (1885), p. 133.

ce qui donnera

$$x = \psi_{2n}^2(\alpha) + (\psi_n^2(\alpha) - \psi_{n+1}^2(\alpha))^2 + (2\psi_n(\alpha)\psi_{n+1}(\alpha))^2,$$

mais j'ignore si cette formule est identique à celle de CATALAN.

Nous avons encore à mentionner ici que la fraction continue de SEELING, définie par la formule (15) de l'article II, conduira à un résultat intéressant, si nous remplaçons α par 2α , puis posons $\beta = \alpha$. On aura, en effet, en vertu des formules (16) et (17) de l'article II, pour les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$\sqrt{4\alpha^2 + 4} = [2\alpha, (2\alpha, 4\alpha)],$$

les deux relations

$$y_{2n+1}^2 - (4\alpha^2 + 4)z_{2n+1}^2 = 1$$

$$y_{2n}^2 - (4\alpha^2 + 4)z_{2n}^2 = -4;$$

c'est-à-dire que y_{2n} est toujours divisible par 2, ce qui donnera, en vertu de (5), la proposition curieuse:

IV. Une réduite quelconque de la fraction continue $[2\alpha, (\alpha, 4\alpha)]$ est précisément le double de la réduite au même indice de la fraction continue $[\alpha, (2\alpha)]$.

Revenons maintenant aux formules récursives (6), puis supposons α égal à un positif entier, il est évident que les $\varphi_n(\alpha)$ et les $\psi_n(\alpha)$ deviennent, quel que soit l'indice n , des positifs entiers. Or, la conclusion de n à $n+1$ donnera immédiatement la proposition, essentielle dans l'étude de plusieurs équations indéterminées:

V. Soit p un positif entier quelconque, les nombres $\psi_n\left(\frac{p}{2}\right)$, sont aussi, quel que soit l'indice n , des positifs entiers.

Cela posé, nous avons à étudier l'identité

$$(19) \quad \varphi_n(\alpha) \psi_{n-1}(\alpha) - \varphi_{n-1}(\alpha) \psi_n(\alpha) = (-1)^n,$$

tirée directement de la définition des $\varphi_n(\alpha)$ et des $\psi_n(\alpha)$ comme les numérateurs respectivement les dénominateurs des réduites (4),

A cet effet, posons, en vertu de (8),

$$\varphi_n(\alpha) = \alpha \psi_n(\alpha) + \psi_{n-1}(\alpha), \quad \varphi_{n-1}(\alpha) = \psi_n(\alpha) - \alpha \psi_{n-1}(\alpha),$$

il résulte, après un simple calcul,

$$(20) \quad \psi_n^2(\alpha) - 2\alpha \psi_n(\alpha) \psi_{n-1}(\alpha) - \psi_{n-1}^2(\alpha) = (-1)^{n-1},$$

ce qui donnera le théorème:

VI. L'équation indéterminée

$$(21) \quad x^2 - pxy - y^2 = \pm 1,$$

où p désigne un positif entier quelconque, admet une infinité de solutions en positifs entiers x_n et y_n , déterminées, à l'aide des valeurs initiales

$$(22) \quad x_1 = p, \quad y_1 = 1,$$

par les formules récursives

$$(22 \text{ bis}) \quad x_{n+1} = px_n + y_n, \quad y_{n+1} = x_n.$$

En effet, posons, dans (19),

$$\alpha = \frac{p}{2},$$

il résulte, comme solutions de l'équation (21),

$$x_n = \psi_{n+1}\left(\frac{p}{2}\right), \quad y_n = \psi_n\left(\frac{p}{2}\right),$$

ce qui donnera, en vertu de la dernière des formules récursives (6), les valeurs indiquées par les formules (22).

Inversement, l'équation indéterminée proposée, savoir

$$x_n^2 - p x_n y_n - y_n^2 = (-1)^n,$$

donnera

$$(23) \quad x_n = \frac{p y_n}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1\right) y_n^2 + (-1)^n},$$

de sorte que nous aurons l'équation de FERMAT

$$z_n^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1\right) y_n^2 = (-1)^n,$$

satisfaite par

$$z_n = \varphi_n\left(\frac{p}{2}\right), \quad y_n = \psi_n\left(\frac{p}{2}\right),$$

et il résulte donc, en vertu de (23),

$$x_n = \frac{p}{2} \psi_n\left(\frac{p}{2}\right) + \varphi_n\left(\frac{p}{2}\right) = \psi_{n+1}\left(\frac{p}{2}\right);$$

c'est-à-dire que les formules (22) représentent toutes les solutions en positifs entiers de l'équation indéterminée (21).

Étudions maintenant la seconde des bases, indiquées dans la formule (2), savoir

$$a = \alpha^2 - 1,$$

les réduites de la fraction continue correspondante, savoir

$$(24) \quad \sqrt{\alpha^2 - 1} = [\alpha - 1, (1, 2\alpha - 2)], \quad \alpha \geq 2,$$

deviennent

$$(25) \quad \frac{\alpha - 1}{1}, \frac{\alpha}{1}, \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{2\alpha - 1}, \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha}, \frac{4\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha + 1}{4\alpha^2 - 2\alpha - 1}.$$

Cela posé, désignons par $\zeta_n(\alpha)$ et $\eta_n(\alpha)$ les numérateurs et les dénominateurs des réduites (25) qui correspondent à des indices impairs, les $\zeta_n(\alpha)$ et les $\eta_n(\alpha)$, ainsi définis, représentent l'ensemble des polynomes entiers qui satisfont à l'identité algébrique

$$(26) \quad \zeta_n^2(\alpha) - (\alpha^2 - 1) \eta_n^2(\alpha) = 1,$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (5),

$$(27) \quad \zeta_n(\alpha) = i^{-n} \varphi_n(i\alpha), \quad \eta_n(\alpha) = i^{1-n} \psi_n(i\alpha).$$

Quant aux polynomes $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$, $\zeta_n(\alpha)$ et $\eta_n(\alpha)$, il est très intéressant qu'ils nous permettent de déterminer toutes les solutions de l'équation générale de FERMAT,

$$(28) \quad A_m^2 - aB_m^2 = (-1)^{mk},$$

pourvu que les premières de ces solutions, savoir les A_1 et les B_1 , soient connues.

Cette propriété essentielle des polynomes susdits se présente, en effet, comme cas très spécial du théorème:

VII. Soient r et n des indices quelconques, on aura, pour les solutions générales de l'équation de Fermat,

$$(29) \quad A_{nr} = \zeta_n(A_r), \quad B_{nr} = B_r \eta_n(A_r)$$

respectivement

$$(29 \text{ bis}) \quad A_{nr} = \varphi_n(A_r), \quad B_{nr} = B_r \psi_n(A_r),$$

selon que rk est pair ou impair.

A cet effet, remarquons tout d'abord que B_{nr} est divisible par B_r , puis posons

$$A_{nr} = C_n, \quad B_{nr} = B_r D_n,$$

il résulte, en vertu de (28),

$$(30) \quad C_n^2 - (aB_r^2)D_n^2 = (-1)^{nrk},$$

De plus, nous aurons

$$A_r^2 - aB_r^2 = (-1)^{rk},$$

de sorte que l'équation (30) se transforme en celle-ci

$$(31) \quad C_n^2 - (A_r^2 - (-1)^{rk})D_n^2 = (-1)^{nrk},$$

et les expressions générales (29) sont évidentes.

Soit particulièrement $r = 1$, il résulte donc

$$(32) \quad A_n = \zeta_n(A_1), \quad B_n = B_1 \eta_n(A_1)$$

respectivement

$$(32 \text{ bis}) \quad A_n = \varphi_n(A_1), \quad B_n = B_1 \psi_n(A_1)$$

selon que k est pair ou impair.

Le théorème VII, intéressant en lui-même, conduira à des résultats très remarquables, nous le verrons, dans l'article qui suit.

XII. Analogies des formules trigonométriques.

Revenons maintenant aux polynômes $\zeta_n(\alpha)$ et $\eta_n(\alpha)$, les valeurs des premiers de ces polynômes, savoir

$$\begin{array}{ll} \zeta_0(\alpha) = 1 & \eta_0(\alpha) = 0 \\ \zeta_1(\alpha) = \alpha & \eta_1(\alpha) = 1 \\ \zeta_2(\alpha) = 2\alpha^2 - 1 & \eta_2(\alpha) = 2\alpha \\ \zeta_3(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha & \eta_3(\alpha) = 4\alpha^2 - 1 \\ \zeta_4(\alpha) = 8\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 & \eta_4(\alpha) = 8\alpha^3 - 4\alpha, \end{array}$$

suppléées par les deux formules récursives

$$\begin{aligned} \zeta_n(\alpha) &= 2\alpha \zeta_{n-1}(\alpha) - \zeta_{n-2}(\alpha) \\ \eta_n(\alpha) &= 2\alpha \eta_{n-1}(\alpha) - \eta_{n-2}(\alpha), \end{aligned}$$

tirées directement des formules (6) et (27) de l'article précédent, donnent immédiatement, par la conclusion de n à $n + 1$, le théorème essentiel:

I. Posons $\alpha = \cos x$, où x est une variable complexe quelconque, nous aurons, quel que soit l'indice n ,

$$(1) \quad \zeta(\cos x) = \cos nx, \quad \eta_n(\cos x) = \frac{\sin nx}{\sin x}.$$

Cela posé, appliquons les identités

$$(2) \quad \varphi_n(\alpha) = i^{-n} \zeta_n(i\alpha), \quad \psi_n(\alpha) = i^{1-n} \eta_n(i\alpha),$$

savoir les formules (27) de l'article précédent, il est évident que les formules (1) donnent, en vertu du théorème VII de l'article précédent, une suite de formules concernant les solutions générales de l'équation de FERMAT

$$(3) \quad A_m^2 - aB_m^2 = (-1)^{mk}.$$

A cet effet, nous posons, dans ce qui suit, pour abrégier et conformément aux significations appliquées dans le théorème VII de l'article précédent,

$$(4) \quad rk = \varepsilon.$$

En premier lieu, prenons pour point de départ les formules qui expriment, sous forme des polynomes entiers de $\cos x$, les fonctions (1), puis remplaçons $\cos x$ par A_r , il résulte les formules générales

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{nr} = 2^{n-1} A_r^n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s\varepsilon+s} n \binom{n-s-1}{s-1}}{2s} (2A_r)^{n-2s} \\ B_{nr} = B_r \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^{s\varepsilon+s} \binom{n-s-1}{s} (2A_r)^{n-2s-1}. \end{array} \right.$$

Soit particulièrement $r = 1$, les formules (5) nous permettent de déterminer les A_n et les B_n , directement à l'aide de A_1 et de B_1 , ce qui n'a pas lieu pour les formules (10) de l'article VII, parce que ces dernières formules contiennent la base a .

En second lieu, appliquons les formules qui expriment, sous forme des polynomes entiers de $\sin x$, ou sous forme de tels polynomes multipliés par $\cos x$, les fonctions (1), puis remarquons que, pour ε pair, le nombre

$$A_r^2 - 1 = aB_r^2$$

correspond à

$$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x,$$

il résulte, en vertu de (2), les quatre formules générales

$$(6) \left\{ \begin{aligned} A_{2nr} &= 2^{n-1} (a B_r^2)^n + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s\epsilon} n}{s} \binom{2n-s-1}{s-1} (4a B_r^2)^{n-s} \\ B_{2nr+r} &= B_r \left((4a B_r^2)^n + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s\epsilon} (2n+1)}{s} \binom{2n-s}{s-1} (4a B_r^2)^{n-s} \right) \\ (7) \left\{ \begin{aligned} B_{2nr} &= B_{2r} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s\epsilon} \binom{2n-s-1}{s} (4a B_r^2)^{n-s-1} \\ A_{2nr+r} &= A_r \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{s\epsilon} \binom{2n-s}{s} (4a B_r^2)^{n-s}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Posons maintenant, dans les six formules générales ainsi obtenues, $r = 1$, puis introduisons

$$B_1 = 1, A_1 = \alpha, a = \alpha^2 - (-1)^\epsilon, B_2 = 2\alpha,$$

nous aurons des expressions générales pour les quatre polynomes $\varphi_n(\alpha)$ et $\psi_n(\alpha)$, $\zeta_n(\alpha)$ et $\eta_n(\alpha)$.

Cela posé, on aura par exemple

$$2\zeta_n(\alpha) = (2\alpha)^n + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s n(n-s-1)!}{s!(n-2s)!} (2\alpha)^{n-2s},$$

ce qui donnera

$$2\zeta_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s n(n-s-1)!}{s!(n-2s)!} \alpha^{n-2s},$$

savoir les polynomes étudiés par CAUCHY¹.

Quant aux inversions des six formules générales que nous venons de développer, la représentation de $\cos^n x$,

¹ Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, t. I, p. 550; Paris 1821.

d'après les $\cos(n-2s)x$, donnera, par le procédé que nous venons d'appliquer,

$$(8) \quad 2^{n-1} A_r^n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}}, (-1)^{s\epsilon} \binom{n}{s} A_{nr-2sr},$$

où l'accent, fixé au signe sommatoire, indique qu'il faut prendre la moitié du dernier terme, dans le cas où n est un nombre pair.

De même, les développements de $(\sin x)^{2n}$ et de $(\sin x)^{2n+1}$, d'après les $\cos(n-2s)x$ ou les $\sin(n-2s+1)x$, donnent

$$(9) \quad 2^{n-1} (aB_r^2)^n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{s\epsilon+s} \binom{2n}{s} A_{2nr-2sr}$$

$$(10) \quad 2^{2n} a^n B_r^{2n+1} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{s\epsilon+s} \binom{2n+1}{s} B_{2nr-2sr+r},$$

où l'accent fixé au signe sommatoire, dans la formule (9), indique qu'il faut, pour $s = n$, remplacer A_0 par $\frac{1}{2}$.

En dernier lieu, les deux formules trigonométriques

$$\cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx = \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x}$$

$$\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx = \frac{\sin nx \sin(n+1)x}{\sin x}$$

et les deux formules analogues contenant, au premier membre, des multiples impairs de x , donnent

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s\epsilon} A_{2nr-2sr} = \frac{B_{nr} A_{2nr+r}}{B_r} \\ \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s\epsilon} B_{2nr-2sr} = \frac{B_{nr} B_{2nr+r}}{B_r} \end{array} \right.$$

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{s\epsilon} A_{2nr-2sr+r} = \frac{B_{2nr+2r}}{2B_r} \\ \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^{s\epsilon} B_{2nr-2sr+r} = \frac{B_{nr+r}^2}{B_r}. \end{array} \right.$$

Remarquons, en passant, que LEJEUNE DIRICHLET a publié un petit Mémoire intitulé: Sur une manière de résoudre l'équation $t^2 - pq^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires.¹

De plus, l'illustre géomètre allemand a appliqué l'équation²

$$1040^2 - 1753 \cdot 617 \cdot 1^2 = -1,$$

sans indiquer qu'elle se présente sous la forme

$$1040^2 - (1040^2 + 1) \cdot 1^2 = -1,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (5) de l'article précédent pour $\alpha = 1040$, $n = 1$.

XIII. Applications diverses.

Les quatre polynomes $\varphi_m(\alpha)$ et $\psi_m(\alpha)$, $\zeta_m(\alpha)$ et $\eta_m(\alpha)$, étudiés dans les deux articles précédents, donnent immédiatement la résolution de plusieurs équations indéterminées, dont quelques-unes seront étudiées plus amplement dans ce qui suit.

1° Remarquons tout d'abord que les formules (8) et (20) de l'article XI donnent, en vertu des identités (27) du même article,

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_n(\alpha) \pm \alpha \eta_n(\alpha) = \pm \eta_{n+1}(\alpha) \\ \eta_n^2(\alpha) - 2\alpha \eta_n(\alpha) \eta_{n-1}(\alpha) + \eta_{n-1}^2(\alpha) = 1, \end{array} \right.$$

¹ Journal de Crelle, t. 17, p. 286—290; 1837; Werke, t. I, p. 343—350.

² Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1834. Werke, t. I, p. 230.

nous aurons immédiatement le théorème suivant, supplément du théorème VI de l'article XI:

I. L'équation indéterminée

$$(2) \quad x^2 - pxy + y^2 = 1,$$

où p désigne un positif entier quelconque, admet une infinité de solutions en positifs entiers, x_n et y_n , déterminées par les valeurs initiales

$$(3) \quad x_1 = p, \quad y_1 = 1$$

à l'aide des formules récurrentes

$$(3 \text{ bis}) \quad x_{n+1} = px_n - y_n, \quad y_{n+1} = x_n.$$

2° Il est évident que les polynômes

$$(4) \quad f_n(\alpha) = \varphi_{2n}(\alpha), \quad g_n(\alpha) = \frac{1}{2} \psi_{2n}(\alpha)$$

représentent toutes les solutions de l'identité algébrique

$$(5) \quad f_n(\alpha)^2 - (4\alpha^2 + 4)g_n^2(\alpha) = 1.$$

Cela posé, il résulte, en vertu du théorème VI de l'article XI, que l'ensemble des solutions en positifs entiers des deux équations indéterminées

$$(6) \quad x^2 - 4pxy - 4y^2 = 1,$$

où p désigne un positif entier quelconque, est représenté par les nombres

$$(6 \text{ bis}) \quad x = \varphi_{2n+1}(p), \quad y = \frac{1}{2} \psi_{2n}(p).$$

3° Les hypothèses

$$(7) \quad f_n(\alpha) = \zeta_{2n}(\alpha), \quad g_n(\alpha) = \frac{1}{2} \eta_{2n}(\alpha)$$

donnent de même l'ensemble des polynômes entiers qui satisfont à l'identité algébrique

$$(8) \quad f_n^2(\alpha) - (4\alpha^2 - 4)g_n^2(\alpha) = 1.$$

Or, les réduites de la fraction continue correspondante, savoir

$$(9) \quad \sqrt{4\alpha^2 - 4} = [2\alpha - 1, (1, \alpha - 2, 1, 4\alpha - 2)], \quad \alpha \geq 3,$$

étant, pour $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\frac{y_n(\alpha)}{z_n(\alpha)} = \frac{2\alpha - 1}{1}, \frac{2\alpha}{1}, \frac{2\alpha^2 - 2\alpha - 1}{\alpha - 1}, \frac{2\alpha^2 - 1}{\alpha}, \dots,$$

on aura, quel que soit n ,

$$(10) \quad y_{4n}(\alpha) = \zeta_{2n}(\alpha), \quad z_{4n}(\alpha) = \frac{1}{2}\eta_{2n}(\alpha).$$

De plus, il est facile de démontrer que

$$(11) \quad h_n(\alpha) = y_{4n+2}(\alpha), \quad k_n(\alpha) = z_{4n+2}(\alpha)$$

représentent l'ensemble des polynomes entiers qui satisfont à l'identité algébrique

$$(11 \text{ bis}) \quad h_n^2(\alpha) - (4\alpha^2 - 4)g_n^2(\alpha) = 4.$$

En effet, remarquons tout d'abord que les formules (11) sont vraies pour $n = 0$, il résulte, en vertu du théorème I de l'article II, que les formules en question sont valables pour une valeur quelconque de l'indice n .

Cela posé, remarquons que l'identité (11 bis) est aussi satisfaite par

$$h_n(\alpha) = \frac{1}{2}\zeta_{2n+1}(\alpha), \quad k_n(\alpha) = \eta_{2n+1}(\alpha),$$

et que $y_{4n+2}(\alpha)$ est du même degré par rapport à α que $\zeta_{2n+1}(\alpha)$, savoir du degré $2n + 1$, il résulte, quel que soit n ,

$$(12) \quad y_{4n+2}(\alpha) = \frac{1}{2}\zeta_{2n+1}(\alpha), \quad z_{4n+2}(\alpha) = \eta_{2n+1}(\alpha),$$

car les polynomes qui satisfont à l'identité (11 bis) sont parfaitement déterminés, pourvu que leurs degrés soient donnés.¹

Quant à l'équation indéterminée

$$(13) \quad x^2 - 2pxy + 4y^2 = 1,$$

où p désigne un positif entier quelconque, ses solutions en positifs entiers deviennent, en vertu du théorème I,

$$(13 \text{ bis}) \quad x = \frac{1}{2} \zeta_{2n+1}(p), \quad y = \eta_{2n+1}(p).$$

4° Les fonctions

$$(14) \quad f_n(\alpha) = \zeta_n(2\alpha + 1), \quad g_n(\alpha) = \eta_n(2\alpha + 1)$$

représentent l'ensemble des polynomes entiers qui satisfont à l'identité algébrique

$$(15) \quad f_n^2(\alpha) - (\alpha^2 + \alpha) g_n^2(\alpha) = 1.$$

La fraction continue correspondante, savoir

$$(15 \text{ bis}) \quad \sqrt{\alpha^2 + \alpha} = [\alpha, (2, 2\alpha)], \quad \alpha \geq 2,$$

ne présente, à ce point de vue, aucun intérêt, et c'est la même chose pour l'équation indéterminée

$$(16) \quad x^2 - (2p + 1)xy + y^2 = 4.$$

En effet, on voit que les nombres entiers x et y sont nécessairement tous deux pairs. Supprimons ensuite le facteur commun 4, il est évident que (16) n'est autre chose que l'équation (2).

5° Les fonctions

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{2n}(\alpha) = \varphi_{2n}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right), \quad \Psi_{2n}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2n}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \\ \Phi_{2n+1}(\alpha) = \sqrt{2} \varphi_{2n+1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right), \quad \Psi_{2n+1}(\alpha) = \psi_{2n+1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \end{array} \right.$$

¹ Voir ma Note: Sur la généralisation du problème de Fermat. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs mathematisk-fysiske Meddelelser III, 16.

représentent l'ensemble des polynomes entiers qui satisfont aux identités algébriques

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{2n}^2(\alpha) - (\alpha^2 + 2) \Psi_{2n}^2(\alpha) = 1 \\ \Phi_{2n+1}^2(\alpha) - (\alpha^2 + 2) \Psi_{2n+1}^2(\alpha) = -2. \end{array} \right.$$

Nous nous bornerons ici à ces indications concernant les polynomes $\Phi_m(\alpha)$ et $\Psi_m(\alpha)$, parce que nous avons à étudier plus amplement, dans l'article qui suit, ces polynomes qui présentent un intérêt particulier.

6° Il est évident que les fonctions

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} Z_{2n}(\alpha) = \zeta_{2n} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right), \quad H_{2n}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{2n} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \\ Z_{2n+1}(\alpha) = \sqrt{2} \zeta_{2n+1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right), \quad H_{2n+1}(\alpha) = \eta_{2n+1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) \end{array} \right.$$

analogues aux $\Phi_m(\alpha)$ et $\Psi_m(\alpha)$, représentent la solution complète, en polynomes entiers, des deux identités algébriques

$$(19 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} Z_{2n}^2(\alpha) - (\alpha^2 - 2) H_{2n}^2(\alpha) = 1 \\ Z_{2n+1}^2(\alpha) - (\alpha^2 - 2) H_{2n+1}^2(\alpha) = 2. \end{array} \right.$$

La fraction continue correspondante, savoir

$$(20) \sqrt{\alpha^2 - 2} = [\alpha - 1, (1, \alpha - 2, 1, 2\alpha - 2)], \quad \alpha \geq 3,$$

ayant, pour $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, les réduites

$$(20 \text{ bis}) \frac{y_n(\alpha)}{z_n(\alpha)} = \frac{\alpha - 1}{1}, \frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha - 1}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}, \dots,$$

on aura par conséquent

$$(21) \quad y_{4n}(\alpha) = \zeta_{2n} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right), \quad z_{4n}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_{2n} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right).$$

De plus, nous aurons, quel que soit n ,

$$(22) \quad y_{4n+2}^2(\alpha) - (\alpha^2 - 2) z_{4n+2}^2(\alpha) = 2,$$

parce que cette formule est évidente pour $n = 0$, et la formule générale est donc une conséquence immédiate du théorème I de l'article II; c'est-à-dire que nous aurons

$$(22 \text{ bis}) \quad Z_{2n+1}(\alpha) = y_{4n+2}(\alpha), \quad H_{2n+1}(\alpha) = z_{4n+2}(\alpha).$$

7° Étudions maintenant les fonctions

$$(23) \quad f_n(\alpha) = \varphi_n\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \quad g_n(\alpha) = \frac{1}{2}\psi_n\left(\alpha + \frac{1}{2}\right),$$

puis remarquons que

$$f_3(\alpha) = 4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 6\alpha + 2, \quad g_3(\alpha) = 2\alpha^2 + \alpha + 1$$

sont les premières de ces fonctions qui aient toutes deux des coefficients entiers; il est évident que la solution complète, en polynomes entiers, de l'identité algébrique

$$(24) \quad h_n^2(\alpha) - (4\alpha^2 + 4\alpha + 5)k_n^2(\alpha) = (-1)^n$$

est représentée par les fonctions

$$(24 \text{ bis}) \quad h_n(\alpha) = \varphi_{3n}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \quad k_n(\alpha) = \frac{1}{2}\psi_{3n}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

La fraction continue dont il s'agit ici, savoir

$$(25) \quad \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha + 5} = [2\alpha + 1, (\alpha, 1, 1, \alpha, 4\alpha + 2)], \quad \alpha \geq 1,$$

ayant, pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, les réduites

$$(25 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n(\alpha)}{z_n(\alpha)} = \frac{2\alpha + 1}{1}, \frac{2\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha}, \frac{2\alpha^2 + 3\alpha + 2}{\alpha + 1}, \\ \frac{4\alpha^2 + 4\alpha + 3}{2\alpha + 1}, \frac{4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 6\alpha + 2}{2\alpha^2 + 2\alpha + 1}, \dots \end{array} \right.$$

on aura, quel que soit l'indice n ,

$$(26) \quad y_{5n}(\alpha) = \varphi_{3n}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \quad z_{5n}(\alpha) = \frac{1}{2}\psi_{3n}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Remarquons ensuite que le procédé ordinaire donnera ici, quel que soit l'indice n ,

$$(27) \quad y_{5n+1}^2(\alpha) - (4\alpha^2 + 4\alpha + 5)z_{5n+1}^2(\alpha) = (-1)^{n-1}4,$$

nous aurons de même

$$(27 \text{ bis}) \quad y_{5n+1}(\alpha) = 2\varphi_{3n+1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \quad z_{5n+1}(\alpha) = \psi_{3n+1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Quant aux équations indéterminées

$$(28) \quad x^2 \mp (4p + 2)xy - 4y^2 = \pm 1,$$

elles conduisent à l'équation de FERMAT

$$x^2 - (4p^2 + 4p + 5)y^2 = \pm 1,$$

et l'on aura donc

$$(28 \text{ bis}) \quad y = k_n(p), \quad x = h_n(p) \pm (2p + 1)k_n(p).$$

8° En dernier lieu, les fonctions

$$(29) \quad f_n(\alpha) = \zeta_{3n}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \quad g_n(\alpha) = \frac{1}{2}\eta_{3n}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

représentent la solution complète, en polynômes entiers, de l'identité algébrique

$$(30) \quad f_n^2(\alpha) - (4\alpha^2 + 4\alpha - 3)g_n^2(\alpha) = 1.$$

La fraction continue correspondante, savoir

$$(31) \quad \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha - 3} = [2\alpha, (1, \alpha - 1, 2, \alpha - 1, 1, 4\alpha)], \quad \alpha \geq 2$$

ayant, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, les réduites

$$(31 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\alpha}{1}, \frac{2\alpha+1}{1}, \frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha}, \frac{4\alpha^2+3\alpha-1}{2\alpha+1}, \\ \frac{4\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha}{2\alpha^2-1}, \frac{4\alpha^3+6\alpha-1}{2\alpha^2+6\alpha}, \dots \end{array} \right.$$

on aura, quel que soit l'indice n ,

$$(32) \quad y_{6n} = \zeta_{3n} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right), \quad z_{6n}(\alpha) = \frac{1}{2} \eta_{3n} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right).$$

De plus, le procédé ordinaire donnera ici

$$(33) \quad y_{6n+2}^2(\alpha) - (4\alpha^2 + 4\alpha - 3) z_{6n+2}^2(\alpha) = 4,$$

donc on aura, quel que soit l'indice n ,

$$(33 \text{ bis}) \quad y_{6n+2}(\alpha) = 2\zeta_{3n+1} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right), \quad z_{6n+2}(\alpha) = \eta_{3n+1}(\alpha).$$

Quant à l'équation indéterminée

$$(34) \quad x^2 \pm (4p + 2)xy + 4y^2 = 1,$$

elle conduira à l'équation de FERMAT

$$z^2 - (4p^2 + 4p - 3)y^2 = 1,$$

et l'on aura donc

$$(34 \text{ bis}) \quad y = g_n(p), \quad x = f_n(p) \pm (2p + 1)g_n(p).$$

Il est évident, du reste, que les polynomes entiers, étudiés dans cet article, donnent des éclaircissements sur la nature de certaines bases d'une forme spéciale. On aura, en effet, les deux propositions suivantes, qui présentent un certain intérêt:

II. Soit n un nombre entier, les nombres

$$(35) \quad n^2 + 1, \quad 4n^2 + 4n + 5$$

sont, pour $n \geq 1$, respectivement $n \geq 0$, toujours des bases de première espèce.

On voit par exemple que les nombres

$$(35 \text{ bis}) \quad (10\nu \pm 1)^2 + 4,$$

divisibles par 5, sont des bases de première espèce, bien qu'ils ne soient pas, pour $\nu \geq 1$, des nombres premiers; les premiers de ces nombres deviennent

$$85, 125, 365, 445, \dots$$

Quant au deuxième de ces nombres, le théorème V de l'article X montre que les puissances $5^{2\varrho+1}$ sont toujours des bases de première espèce.

Remarquons, en passant, que les réduites de la fraction continue

$$\sqrt{10} = [3, (6)]$$

deviennent

$$\frac{3}{1}, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}, \frac{4443}{1405}, \dots$$

il est évident que le nombre 5 est, pour la base 10, du rang 5; c'est-à-dire que les nombres $2 \cdot 5^{2\varrho+1}$ sont toujours des bases de première espèce.

Dans l'article XVIII, nous avons à démontrer que les nombres $2 \cdot 5^{2\varrho}$ sont aussi des bases de première espèce.

Chose curieuse, le nombre

$$5 \cdot 521 = 51^2 + 4,$$

de la forme (35 bis), ne satisfait pas aux conditions suffisantes que LEJEUNE DIRICHLET¹ a données, afin que le produit de deux nombres premiers de la forme $4\nu + 1$ soit une base de première espèce.

III. Soit n un positif entier, les nombres

$$(36) \quad n^2 \pm 2, \quad n(n+1), \quad n(n+2), \quad n(n+4), \quad 4n$$

sont toujours des bases de seconde espèce, abstraction faite peut-être des petites valeurs de n .

On voit par exemple que les produits

$$13 \cdot 17, \quad 37 \cdot 41, \quad 97 \cdot 101, \quad 109 \cdot 113$$

sont des bases de seconde espèce, bien que les huit nombres premiers en question soient tous de la forme $4\nu + 1$.

¹ Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1834. Werke, t. I, p. 230.

Quant à la base 2 qui est de première espèce, on voit que les nombres

$$(36 \text{ bis}) \quad 2 \cdot 17 = 6^2 - 2, \quad 2 \cdot 73 = 12^2 + 2, \quad 2 \cdot 97 = 14^2 - 2$$

sont des bases de seconde espèce, bien que les trois nombres premiers 17, 73, 97 soient tous de la forme $4\nu + 1$.

Dans l'article XXII, nous avons à étudier plus ample-ment les nombres de la forme (36 bis).

Remarquons, en passant, que les bases spéciales que nous venons d'étudier sont bien connues. En effet, EULER¹ en a considéré les quatre qui se présentent sous la forme $\alpha^2 \pm 1$ et $\alpha^2 \pm 2$, auxquelles WERTHEIM² a ajouté $\alpha^2 + \alpha$, tandis que M. F. TANO³ a étudié $\alpha^2 \pm 4$, et M. E. DE JONQUIÈRES⁴ remarque que les nombres $(2\alpha + 1)^2 + 4$ sont toujours des bases de première espèce. De plus, ce dernier géomètre indique que les nombres

$$(\alpha^2 + 1) \psi_{2n+1}^2(\alpha) = \varphi_{2n+1}^2(\alpha) + 1$$

sont toujours des bases de première espèce, ce qui est, du reste, un cas très spécial du théorème IV de l'article X.

Quant aux nombres $\alpha^2 \pm 1$, le théorème II de l'article IV donnera la proposition curieuse:

IV. Soit $a = (4\nu + 3)^{2q+1}$, où $4\nu + 3$ est un nombre premier, tous les nombres $A_{2n+1}(a)$ sont des bases de première ou de seconde espèce, selon que ν est pair ou impair.

¹ Algebra, herausgegeben von J. P. GRÜSON, t. II, p. 249—251; Berlin 1797.

² Anfangsgründe der Zahlenlehre, p. 223; Brunswick 1902.

³ Bulletin de Darboux (2), t. 4, p. 215—218; 1890.

⁴ Comptes rendus, t. 126, p. 1837—1843; 1898.

XIV. De la base $a = \alpha^2 + 2$.

Revenons maintenant aux polynomes $\Phi_m(\alpha)$ et $\Psi_m(\alpha)$, définis par les formules (17) de l'article précédent et satisfaisant aux identités algébriques

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi_{2n}^2(\alpha) - (\alpha^2 + 2) \Psi_{2n}^2(\alpha) = 1 \\ \Phi_{2n+1}^2(\alpha) - (\alpha^2 + 2) \Psi_{2n+1}^2(\alpha) = -2, \end{cases}$$

la fraction continue correspondante, savoir

$$(2) \quad \sqrt{\alpha^2 + 2} = [\alpha, (\alpha, 2\alpha)],$$

a les réduites

$$(2 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}, \frac{2\alpha^3 + 3\alpha}{2\alpha^2 + 1}, \frac{2\alpha^4 + 4\alpha^3 + 1}{2\alpha^3 + 2\alpha}, \\ \frac{4\alpha^5 + 10\alpha^3 + 5\alpha}{4\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1}, \frac{4\alpha^6 + 12\alpha^4 + 9\alpha^2 + 1}{4\alpha^5 + 8\alpha^3 + 3\alpha}, \dots \end{array} \right.$$

ce qui donnera les formules récursives

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi_{2n}(\alpha) = \alpha \Phi_{2n-1}(\alpha) + \Phi_{2n-2}(\alpha) \\ \Psi_{2n}(\alpha) = \alpha \Psi_{2n-1}(\alpha) + \Psi_{2n-2}(\alpha) \end{cases}$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \Phi_{2n+1}(\alpha) = 2\alpha \Phi_{2n}(\alpha) + \Phi_{2n-1}(\alpha) \\ \Psi_{2n+1}(\alpha) = 2\alpha \Psi_{2n}(\alpha) + \Psi_{2n-1}(\alpha). \end{cases}$$

Appliquons ensuite les définitions (17) de l'article précédent, il résulte, en vertu des formules (7), (8), (9), (10) de l'article XI,

$$(4) \quad \begin{cases} \Psi_{2n}(\alpha) + \Psi_{2n+2}(\alpha) = \Phi_{2n-1}(\alpha) \\ \Psi_{2n+1}(\alpha) + \Psi_{2n-1}(\alpha) = 2\Psi_{2n}(\alpha) \end{cases}$$

$$(5) \quad \Phi_{2n}(\alpha) \pm \alpha \Psi_{2n}(\alpha) = \Psi_{2n+1}(\alpha)$$

$$(6) \quad \begin{cases} \Phi_{2n+1}(\alpha) + \alpha \Psi_{2n+1}(\alpha) = 2\Psi_{2n+2}(\alpha) \\ \Phi_{2n+1}(\alpha) - \alpha \Psi_{2n+1}(\alpha) = 2\Psi_{2n}(\alpha) \end{cases}$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{4n}(\alpha) = 2\Phi_{2n}^2(\alpha) - 1 \\ \Phi_{4n+2}(\alpha) = \Phi_{2n+1}^2(\alpha) - 1 \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{4n}(\alpha) = 2\Phi_{2n}(\alpha)\Psi_{2n}(\alpha) \\ \Psi_{4n+2}(\alpha) = \Phi_{2n+1}(\alpha)\Psi_{2n+1}(\alpha). \end{array} \right.$$

Remarquons, en passant, que la dernière des formules (4) donnera, en vertu de (5), les relations curieuses

$$(9) \quad \Psi_{2n+1}(\alpha) - \Phi_{2n}(\alpha) = \Phi_{2n}(\alpha) - \Psi_{2n-1}(\alpha) = \alpha\Psi_{2n}(\alpha).$$

Quant à la dernière des formules (12) de l'article XI, elle donne

$$(10) \quad \Psi_{4n+1}(\alpha) = \Psi_{2n+1}^2(\alpha) + 2\Psi_{2n}^2(\alpha),$$

tandis qu'il résulte, en vertu de la formule (14) de l'article susdit,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\Psi_{4n}(\alpha) = \Psi_{2n+1}^2(\alpha) - \Psi_{2n-1}^2(\alpha) \\ \alpha\Psi_{4n+2}(\alpha) = \Psi_{2n+2}^2(\alpha) - \Psi_{2n}^2(\alpha). \end{array} \right.$$

Nous avons encore à appliquer la formule (15) de l'article XI, ce qui donnera les relations intéressantes

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\Psi_{2n}^2(\alpha) + 1 = \Psi_{2n-1}(\alpha)\Psi_{2n+1}(\alpha) \\ \Psi_{2n+1}^2(\alpha) - 1 = 2\Psi_{2n}(\alpha)\Psi_{2n+2}(\alpha). \end{array} \right.$$

Cela posé, il saute aux yeux que l'expression de $\Psi_{2m+1}(\alpha)$ indiquée dans la formule (10), est très intéressante, parce que $\Psi_{2m+1}(\alpha)$ est, en vertu des formules (1) et (12), diviseur des deux polynomes

$$(13) \quad \Phi_{2m+1}^2(\alpha) + 2, \quad 2\Psi_{2m}^2(\alpha) + 1$$

qui sont tous deux de la même forme que le second membre de (10), mais un des deux polynomes qui figurent dans les expressions (13) est réduit à l'unité.

Cette propriété des $\Psi_{2m+1}(\alpha)$ est très intéressante, au point de vue historique, nous le verrons dans l'article XVI, en démontrant deux propositions de FERMAT.

Du reste, nous avons, dans l'article XVII, à donner une nouvelle démonstration de la formule (10).

Remarquons maintenant que la fraction continue (2) appartient à celles considérées par SEELING; la formule (18) de l'article II donnera immédiatement

$$(14) \quad \Phi_n(\alpha)\Phi_{n-1}(\alpha) - (\alpha^2 + 2)\Psi_n(\alpha)\Psi_{n-1}(\alpha) = (-1)^n \alpha,$$

tandis que la définition même des $\Phi_m(\alpha)$ et des $\Psi_m(\alpha)$, comme étant, pour $m = 1, 2, 3, \dots$, les numérateurs respectivement les dénominateurs des réduites (2 bis), donne cette autre identité

$$(15) \quad \Phi_n(\alpha)\Psi_{n-1}(\alpha) - \Psi_n(\alpha)\Phi_{n-1}(\alpha) = (-1)^{n-1}.$$

Éliminons ensuite, en vertu de (5), les fonctions $\Phi_n(\alpha)$ et $\Phi_{n-1}(\alpha)$, il résulte

$$(16) \quad \Psi_{2n+1}^2(\alpha) \mp 2\alpha\Psi_{2n}(\alpha)\Psi_{2n+1}(\alpha) - 2\Psi_{2n}^2(\alpha) = 1,$$

où les trois signes doubles correspondent entre eux.

Cela posé, on aura immédiatement la proposition:

I. Soit p un positif entier quelconque, les valeurs

$$(17) \quad x = \Psi_{2n+1}(p), \quad y = \Psi_{2n}(p)$$

représentent l'ensemble des solutions en positifs entiers de l'équation indéterminée

$$(18) \quad x^2 \mp 2pxy - 2y^2 = 1.$$

Remarquons, en passant, que les polynomes $Z_n(\alpha)$ et $H_n(\alpha)$, définis par les formules (19) de l'article précédent, se présentent aussi sous la forme

$$(19) \quad Z_n(\alpha) = i^{-n} \Phi_n(i\alpha), \quad H_n(\alpha) = i^{1-n} \Psi_n(i\alpha),$$

il est évident que ces polynomes satisfont à une suite de relations analogues à celles que nous venons de démontrer pour les $\Phi_n(\alpha)$ et les $\Psi_n(\alpha)$.

Or, ces identités étant, en vertu de (19), des conséquences immédiates des précédentes, nous nous bornerons à cette indication de leur existence.

CHAPITRE IV

Des nombres $x^2 + ay^2$.

XV. Formules générales.

Dans plusieurs équations indéterminées, les nombres de la forme

$$p^2 + aq^2,$$

où a est un positif entier, jouent un rôle fondamental; c'est pourquoi il nous semble utile de développer une suite de formules fondamentales et de résoudre certains problèmes, qui se rattachent aux nombres susdits.

A cet effet, prenons pour point de départ l'identité algébrique

$$(1) \quad (p^2 + aq^2)(r^2 + as^2) = (pr \pm aqs)^2 + a(ps \mp rq)^2,$$

nous avons tout d'abord à résoudre deux problèmes qui correspondent à des formes spéciales du produit, développé dans la formule (1), savoir:

I. Déterminer les positifs entiers x, y, z qui satisfassent à l'équation indéterminée

$$(2) \quad (p^2 + aq^2)(x^2 + ay^2) = z^2 + a,$$

où p et q sont des positifs entiers donnés, premiers entre eux.

Il résulte immédiatement, en vertu de (1),

$$(3) \quad px \mp qy = \pm 1,$$

équation indéterminée du premier degré qui est toujours résoluble en nombres entiers, et qui représente la condition suffisante et nécessaire pour l'existence de l'équation (2).

II. Déterminer les positifs entiers x, y, z qui satisfassent à l'équation indéterminée

$$(4) \quad (p^2 + aq^2)(x^2 + ay^2) = az^2 + 1,$$

où p et q sont des positifs entiers donnés, tels que p et aq sont premiers entre eux.

Dans ce cas, nous avons à résoudre l'équation indéterminée

$$(5) \quad px \pm aqy = \pm 1,$$

ce qui est toujours possible, parce que p est supposé premier avec le produit aq .

III. Déterminer les positifs entiers x, y, z qui satisfassent à l'équation indéterminée

$$(6) \quad (x^2 + ay^2)^2 = az^2 + 1,$$

où a est un positif entier donné, n'étant pas un carré exact.

En remarquant que la formule (1) se présente, dans ce cas, sous la forme

$$(7) \quad (x^2 + ay^2)^2 = (x^2 - ay^2)^2 + a(2xy)^2,$$

on aura ici à résoudre l'équation de FERMAT

$$(8) \quad x^2 - ay^2 = \pm 1,$$

ce qui donnera

$$(9) \quad x = A_n, \quad y = B_n, \quad z = B_{2n},$$

de sorte que l'équation (6) n'est autre chose que celle-ci

$$A_{2n}^2 - aB_{2n}^2 = 1.$$

Multiplions maintenant par $\alpha^2 + a\beta^2$ les deux membres de (7), il résulte, en vertu de (1), cette autre identité

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha^2 + a\beta^2)(x^2 + ay^2)^2 = \\ = [(x^2 - ay^2)\alpha \pm 2a\beta xy]^2 + a[(x^2 - ay^2)\beta \mp 2\alpha xy]^2, \end{array} \right.$$

essentielle et dans la théorie de l'équation de FERMAT et dans la théorie des nombres $x^2 + ay^2$, nous le verrons, en résolvant des problèmes convenables.

IV. Déterminer les positifs entiers x, y, z qui satisfassent à l'équation indéterminée

$$(11) \quad (\alpha^2 + a)(x^2 + ay^2)^2 = z^2 + a,$$

où a et α sont des positifs entiers donnés, tels que $\alpha^2 + a$ n'est pas un carré exact.

Soit, dans (10), $\beta = 1$, il résulte, en vertu de (11),

$$x^2 - ay^2 \mp 2\alpha xy = \pm 1,$$

ce qui donnera

$$x = \pm \alpha y \pm \sqrt{(\alpha^2 + a)y^2 \pm 1},$$

de sorte qu'il s'agit de résoudre l'équation de FERMAT

$$(12) \quad t^2 - (\alpha^2 + a)y^2 = \pm 1,$$

et l'on aura donc

$$(13) \quad y = B_n, \quad x = |A_n \pm \alpha B_n|,$$

tandis que z se présente sous la forme

$$(13 \text{ bis}) \quad z = |(x^2 - ay^2)\alpha \pm 2\alpha xy|,$$

où les signes doubles qui figurent dans x et z sont les mêmes.

V. Déterminer les positifs entiers x, y, z qui satisfassent à l'équation indéterminée

$$(14) \quad (a\alpha^2 + 1)(x^2 + ay^2)^2 = az^2 + 1,$$

où a et α sont des positifs entiers donnés, tels que la somme $a^2\alpha^2 + a$ n'est pas un carré exact.

Posons, dans (10), $\alpha = 1$, puis remplaçons β par α , il résulte, en vertu de (14),

$$x^2 - ay^2 \pm 2a\alpha xy = \pm 1,$$

savoir

$$x = \mp a \alpha y \pm \sqrt{(a^2 \alpha^2 + a)y^2 \pm 1},$$

ce qui conduira à l'équation de FERMAT

$$(15) \quad t^2 - (a^2 \alpha^2 + a)y^2 = \pm 1,$$

de sorte que nous aurons

$$(16) \quad y = B_n, \quad x = |A_n \mp a \alpha B_n|,$$

tandis que z se présente sous la forme

$$(16 \text{ bis}) \quad z = |(x^2 - ay^2) \alpha \mp 2xy|,$$

où les signes doubles qui figurent dans x et z sont les mêmes.

Quant aux nombres $x^2 + ay^2$, nous avons encore à démontrer quelques propriétés fondamentales des positifs entiers X_n et Y_n , définis par l'identité

$$(17) \quad (x^2 + ay^2)^n = X_n^2 + aY_n^2.$$

A cet effet, multiplions par $x^2 + ay^2$ les deux membres de (17), il résulte immédiatement, en vertu de (1), les formules récursives

$$\pm X_{n+1} = xX_n \pm ayY_n$$

$$\pm Y_{n+1} = xY_n \mp yX_n,$$

et la conclusion de m à $m + 1$ donnera la congruence

$$(18) \quad Y_n \equiv 0 \pmod{y},$$

donc nous aurons la proposition:

VI. Une équation de la forme

$$(19) \quad (x^2 + ay^2)^n = X_n^2 + a$$

n'est possible, à moins que $y = 1$.

En second lieu, multiplions par

$$(x^2 + ay^2)^2 = (x^2 - ay^2)^2 + a(2xy)^2$$

les deux membres de (17), il résulte les deux autres formules récurrentes

$$\pm X_{n+2} = (x^2 - ay^2)X_n \pm 2axy Y_n$$

$$\pm Y_{n+2} = (x^2 - ay^2)Y_n \mp 2xy X_n,$$

ce qui donnera, par la conclusion de m à $m + 1$, les deux congruences

$$(20) \quad X_{2n+1} \equiv 0 \pmod{x}$$

$$(21) \quad Y_{2n} \equiv 0 \pmod{2xy}.$$

Remarquons ensuite que Y_{2n} est toujours un nombre pair, nous aurons les deux propositions analogues à VI:

VII. Une équation de la forme

$$(22) \quad (x^2 + ay^2)^{2n} = X_{2n}^2 + a$$

est toujours impossible.

VIII. Une équation de la forme

$$(23) \quad (x^2 + ay^2)^{2n+1} = aY_{2n+1}^2 + 1$$

est impossible, à moins que $x = 1$.

XVI. Des cubes. Propositions de Fermat.

Revenons maintenant à la formule (10) de l'article précédent, puis posons $x = \alpha$, $y = \beta$, il résulte la formule plus spéciale

$$(1) \quad \begin{cases} (\alpha^2 + a\beta^2)^3 = \\ = [(\alpha^2 - a\beta^2)\alpha \pm 2a\alpha\beta^2]^2 + a[(\alpha^2 - a\beta^2)\beta \mp 2\alpha^2\beta]^2, \end{cases}$$

essentielle dans des recherches sur les cubes.

En premier lieu, nous aurons à démontrer le théorème:

I. Soit a un positif entier quelconque, l'équation indéterminée

$$(2) \quad (x^2 + ay^2)^3 = az^2 + 1$$

n'est jamais résoluble en positifs entiers.

On aura, en effet, conformément à la formule (1),

$$(x^2 - ay^2)x \pm 2axy = \pm 1,$$

ce qui donnera à la fois $x = \pm 1$ et

$$1 - ay^2 \pm 2ay^2 = \pm 1,$$

où les signes doubles sont arbitraires; c'est-à-dire qu'il nous reste à étudier ces deux équations indéterminées

$$ay^2 \pm 2ay^2 = 0$$

$$ay^2 \pm 2ay^2 = \pm 2.$$

Or, il est évident que la première de ces équations est impossible, parce qu'elle donne $y = 0$. Quant à la seconde des équations susdites, elle entraîne nécessairement celle-ci

$$ay^2 = 2,$$

parce que les autres combinaisons des signes doubles ne sont pas admissibles; c'est-à-dire que nous aurons, comme seule possibilité

$$a = 2, \quad y = 1,$$

et il résulte donc, en vertu de (2),

$$26 = 2z^2,$$

ce qui est impossible.

Comme supplément au théorème I, nous aurons à démontrer celui-ci:

II. Soit a un positif entier, l'équation indéterminée

$$(3) \quad (x^2 + ay^2)^3 = z^2 + a$$

n'est jamais résoluble en positifs entiers, à moins que a ne se présente sous la forme

$$(4) \quad a = 3\alpha^2 \pm 1,$$

où α est un positif entier quelconque. Dans ce cas, l'équation susdite n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(5) \quad x = \alpha, \quad y = 1, \quad z = 8\alpha^3 \pm 3\alpha.$$

La formule (1) donnera ici

$$(x^2 - ay^2)y \mp 2x^2y = \pm 1,$$

ce qui exige $y = \pm 1$, et l'on aura donc

$$x^2 - a \mp 2x^2 = \pm 1,$$

où les signes sont arbitraires; c'est-à-dire que l'hypothèse

$$(6) \quad a = 3x^2 \pm 1$$

est la seule possible, et a est par conséquent de la forme (4).

Soit maintenant α un positif entier quelconque, et soit a déterminé par l'expression (4), il résulte, en vertu de (6),

$$x = \alpha,$$

de sorte qu'il nous reste à déterminer l'inconnue z .

A cet effet, on aura, en vertu de (1),

$$\pm z = -\alpha(2\alpha^2 \pm 1) \pm 2\alpha(3\alpha^2 \pm 1),$$

où ± 1 a la même valeur dans les deux parenthèses qui figurent au second membre, tandis que les autres signes sont arbitraires.

Cela posé, il ne nous reste évidemment que ces deux valeurs

$$(8) \quad z = 8\alpha^3 \pm 3\alpha$$

$$(8 \text{ bis}) \quad z = 4\alpha^3 \pm \alpha,$$

et l'identité algébrique

$$(4\alpha^2 \pm 1)^3 = (8\alpha^3 \pm 3\alpha)^2 + 3\alpha^2 \pm 1$$

montre clairement que la valeur (8) est applicable, quel que soit le positif entier α .

Quant à la valeur (8 bis), on aura, en vertu de (3),

$$6\alpha^4 \pm 5\alpha^2 + 1 = 0,$$

ce qui est impossible, et l'équation (3) n'a donc que la seule solution indiquée par les formules (5).

Quant au théorème II, je ne me rappelle pas l'avoir vu dans la littérature qui traite, plus ou moins habilement, les équations indéterminées

$$(9) \quad x^3 = y^2 \pm a,$$

où a est un positif entier, littérature de laquelle nous citons ici les publications de M. M. E. DE JONQUIÈRES¹, S. RÉALIS², FAUQUEMBERGUE³ et le P. TH. PEPIN S. J.⁴

Remarquons encore que LE BESGUE⁵ et GERONO⁶ ont démontré l'impossibilité de l'équation (9), où le second membre est $y^2 - 7$ respectivement $y^2 + 17$.

Revenons maintenant aux deux théorèmes que nous venons de démontrer, il est évident qu'ils donnent une suite de résultats intéressants concernant les cubes, résultats parmi lesquels nous aurons à étudier plus amplement ceux qui suivent.

III. Soit

$$(10) \quad a = 1, 2, 3, 4,$$

l'équation indéterminée

¹ Nouvelles Annales (2) t. 7, pp. 374—381, 514—516; 1878.

² Ibid. (3) t. 2, p. 289—297; 1883.

³ Ibid. (3) t. 4, p. 379—380; 1885.

⁴ Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, t. VI B, p. 86—100; 1882. Comptes rendus, t. 119, p. 397—399; 1894, t. 120, p. 1254—1256; 1895.

⁵ Nouvelles Annales (2) t. 8, p. 455; 1869.

⁶ Ibid. (2) t. 16, p. 325—326; 1877.

$$(11) \quad x^3 = ay^2 + 1$$

n'est jamais résoluble en positifs entiers.

Considérons tout d'abord les valeurs 1, 2, 3, nous aurons, d'après FERMAT, que x est nécessairement un nombre de la forme

$$x = \alpha^2 + a\beta^2, \quad a = 1, 2, 3,$$

où α et β sont des positifs entiers, et le théorème I montre que cette hypothèse est inadmissible.

Quant à la valeur $a = 4$, l'équation (11) se présente sous la forme

$$x^3 = (2y)^2 + 1,$$

de sorte que x est aussi une somme de deux carrés, savoir

$$x = \alpha^2 + (2\beta)^2,$$

ce qui est impossible.

IV. L'équation indéterminée

$$(12) \quad x^3 = y^2 + 3$$

n'est pas résoluble en positifs entiers.

En effet, on aura, aussi dans ce cas,

$$x = \alpha^2 + 3\beta^2,$$

et le théorème II montre clairement qu'une telle valeur de x est inadmissible.

Soit maintenant, dans le théorème II, $a = 1$, $a = 2$, x se présente sous la forme

$$x = \alpha^2 + 2\beta^2,$$

donc nous aurons la proposition:

V. L'équation indéterminée

$$(13) \quad x^3 = y^2 + 2$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(13 \text{ bis}) \quad x = 3, \quad y = 5.$$

Quant aux valeurs $\alpha = 1$, $a = 4$, nous aurons à démontrer cette autre proposition:

VI. L'équation indéterminée

$$(14) \quad x^3 = y^2 + 4$$

admet deux solutions en positifs entiers, savoir

$$(14 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = 5, & y = 11 \\ x = 2, & y = 2. \end{cases}$$

Soit tout d'abord y impair, x aura la même propriété; de plus, x est une somme de deux carrés, savoir

$$x = \alpha^2 + 4\beta^2,$$

et la première des solutions (14 bis) est une conséquence immédiate du théorème II.

Soit ensuite, dans (14), y un nombre pair, x aura la même propriété; posons donc $2x$ et $2y$ au lieu de x et y , il nous reste à démontrer cette autre proposition:

VII. L'équation indéterminée

$$(15) \quad 2x^3 = y^2 + 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(15 \text{ bis}) \quad x = y = 1.$$

Remarquons que x se présente sous la forme

$$x = \alpha^2 + \beta^2,$$

puis appliquons la formule

$$2(p^2 + q^2) = (p + q)^2 + (p - q)^2,$$

il résulte, en vertu de (1), que α et β satisfont à une de ces deux conditions :

$$(\alpha + \beta) ((\alpha - \beta)^2 \pm 2\alpha\beta) = \pm 1$$

$$(\alpha - \beta) ((\alpha + \beta)^2 \pm 2\alpha\beta) = \pm 1,$$

savoir

$$\alpha + \beta = \pm 1, \quad (\alpha - \beta)^2 \pm 2\alpha\beta = \pm 1$$

$$\alpha - \beta = \pm 1, \quad (\alpha + \beta)^2 \pm 2\alpha\beta = \pm 1.$$

Cela posé, on aura une seule condition de la forme

$$4\alpha\beta \pm 2\alpha\beta = 1 \pm 1,$$

ce qui exige nécessairement $\alpha\beta = 0$, savoir $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$, parce que l'hypothèse $\alpha\beta = 1$, $\alpha = \beta = 1$ est inadmissible; car x est, en vertu de (15) un nombre impair; c'est-à-dire que nous aurons précisément la solution (15 bis), ce qui donnera la seconde des solutions (14 bis).

Les deux théorèmes V et VI sont dus à FERMAT¹, et le premier de ces propositions n'est autre chose que l'observation XLII sur DIOPHANTE². Plus tard FERMAT a communiqué cette proposition remarquable à FRENICLE, et c'est ce dernier géomètre que FERMAT a en vue quand il écrit, dans une lettre, datée mercredi 15 août 1657 et adressée à DIGBY³:

»Je lui avois écrit qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers qui, joint au binaire, fasse un cube, et que ledit quarré est 25, auquel si vous ajoutez 2, il se fait 27, qui est cube. Il a peine à croire cette proposition négative et la trouve un peu hardie et trop générale.

Mais, pour augmenter son étonnement, je dis que, si on cherche un quarré qui, ajouté à 4, fasse un cube, il

¹ Œuvres, t. II, pp. 345, 375.

² Ibid. t. I, p. 333.

³ Ibid. t. II, p. 345.

n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, savoir 4 et 121. Car 4 ajouté à 4 fait 8 qui est cube, et 121 ajouté à 4 fait 125 qui est aussi cube. Mais, après cela, toute l'infinité des nombres n'en sauroit fournir un troisième qui ait la même propriété!«

Le P. TH. PEPIN¹ remarque, avec raison, que la démonstration des deux théorèmes susdits, communiquée par LEGENDRE², n'est pas rigoureuse, parce qu'elle suppose $x = p^2 + 2$ au lieu de $x = p^2 + 2q^2$, faute que le savant géomètre a redressée, dans son Mémoire que nous venons de citer.

Du reste, la faute susdite est très curieuse, comparée avec les formules (1), (12), (13) de l'article XIV.

XVII. D'autres applications.

Il est intéressant, ce me semble, que les formules générales que nous venons de développer permettent de donner une nouvelle démonstration de l'identité (10) de l'article XIV, identité qui est la conséquence immédiate du théorème:

I. L'identité algébrique

$$(1) \quad (f^2(x) + 2g^2(x))^2 (x^2 + 2) = h^2(x) + 2$$

admet, comme seules solutions, les polynomes

$$(2) \quad f(x) = \Phi_{2n+1}(x), \quad g(x) = \Psi_{2n}(x), \quad h(x) = \Psi_{4n+1}(x).$$

A cet effet, remarquons que la formule (10) de l'article XV donnera

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 + 2b^2)^2 (a^2 + 2) = \\ = [(a^2 - 2b^2)\alpha \pm 4ab]^2 + 2[a^2 - 2b^2 \mp 2ab\alpha]^2, \end{array} \right.$$

¹ Journal de Mathématiques (3) t. 1, p. 345; 1875.

² Théorie des Nombres, t. II, p. 14; 3^e édition, Paris 1830.

nous aurons à déterminer a et b , de sorte que cette formule se présente sous la forme

$$(4) \quad (\alpha^2 + 2b^2)^2 (\alpha^2 + 2) = c^2 + 2.$$

Cela posé, il résulte, en vertu de (3),

$$(5) \quad \alpha^2 - 2b^2 \mp 2\alpha ab = \pm 1,$$

savoir

$$a = \pm \alpha b \pm \sqrt{(\alpha^2 + 2)b^2 \pm 1},$$

et l'on aura donc à déterminer b sous forme d'un polynôme entier de α , tel que la racine carrée devienne aussi un polynôme entier de α .

A cet effet, il faut évidemment supprimer, dans (5), le signe inférieur qui figure au second membre, donc on aura

$$(6) \quad b = \Psi_{2n}(\alpha), \quad \sqrt{(\alpha^2 + 2)b^2 + 1} = \Phi_{2n}(\alpha),$$

de sorte que a se présente sous la forme

$$(6 \text{ bis}) \quad a = \Phi_{2n}(\alpha) \pm \alpha \Psi_{2n}(\alpha) = \Psi_{2n+1}(\alpha),$$

d'où il résulte, en vertu de (3) et (4),

$$c = (\alpha^2 - 2b^2)\alpha \pm 4ab,$$

savoir

$$c = \alpha \Phi_{2n}^2(\alpha) \pm 2\alpha^2 \Phi_{2n}(\alpha) \Psi_{2n}(\alpha) + \\ + (\alpha^3 + 2\alpha) \Psi_{2n}^2(\alpha) \pm 4\Phi_{2n}(\alpha) \Psi_{2n}(\alpha),$$

ce qui donnera, après un simple calcul,

$$c = \alpha (2\Phi_{2n}^2(\alpha) - 1) \pm (\alpha^2 + 2) \Psi_{4n}(\alpha),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$c = \alpha \Phi_{4n}(\alpha) \pm (\alpha^2 + 2) \Psi_{4n}(\alpha),$$

de sorte que les formules récursives de LAGRANGE donnent

$$(7) \quad c = \Phi_{4n+1}(\alpha).$$

Cela posé, il est évident que les formules (6) et (7) donnent immédiatement les solutions (2), savoir la démonstration du théorème I, mais ces deux formules conduiront plus loin encore.

En effet, remarquons que l'équation (1) n'est autre chose que la première des formules (1) de l'article XIV, savoir l'équation de FERMAT qui correspond à la base $x^2 + 2$, il résulte, en vertu de la valeur de $h(x)$,

$$(8) \quad \psi_{4n+1}(x) = \psi_{2n+1}^2(x) + 2\psi_{2n}^2(x),$$

savoir la formule (10) de l'article XIV.

Étudions maintenant la formule

$$(9) \quad \begin{cases} (a^2 + 2b^2)^2(2a^2 + 1) = \\ = [a^2 - 2b^2 \pm 4ab\alpha]^2 + 2[(a^2 - 2b^2)\alpha \mp 2ab]^2, \end{cases}$$

analogue à (3), nous avons à déterminer a et b , de sorte que cette formule se présente sous la forme

$$(10) \quad (a^2 + 2b^2)^2(2a^2 + 1) = 2c^2 + 1,$$

ce qui donnera

$$(10 \text{ bis}) \quad \begin{cases} a^2 - 2b^2 \pm 4ab\alpha = \pm 1 \\ (a^2 - 2b^2)\alpha \mp 2ab = \pm c. \end{cases}$$

Or, il est évident que l'équation (10) n'est autre chose que celle-ci

$$(a^2 + 2b^2)^2((2\alpha)^2 + 2) = (2c)^2 + 2,$$

savoir l'équation (4), de sorte que nous aurons

$$(11) \quad a = \psi_{2n+1}(2\alpha), \quad b = \psi_{2n}(2\alpha), \quad c = \frac{1}{2}\Phi_{4n+1}(\alpha).$$

Nous avons encore à citer ici le théorème, analogue à I:

II. L'identité algébrique

$$(12) \quad (f^2(x) + g^2(x))^2 (x^2 + 1) = h^2(x) + 1$$

admet, comme seules solutions, les polynomes

$$(13) \quad f(x) = \varphi_{n+1}(x), \quad g(x) = \psi_n(x), \quad h(x) = \psi_{2n+1}(x).$$

La démonstration est analogue à la précédente, et les formules (12) et (13) donnent l'identité (12) de l'article XI, savoir

$$(14) \quad \psi_{2n+1}(x) = \psi_{n+1}^2(x) + \psi_n^2(x).$$

CHAPITRE V

L'équation de Théon de Smyrne.

XVIII. Formules générales.

Il est évident que le nombre 2 est la plus petite de toutes les bases, mais cette base est aussi une des plus intéressantes, parce que les nombres A_n et B_n , déterminés par l'équation correspondante de FERMAT

$$(1) \quad A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n,$$

jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'équation générale de FERMAT, nous le verrons dans ce qui suit.

Remarquons que les A_n et les B_n sont les numérateurs, respectivement les dénominateurs des réduites de la fraction continue

$$(2) \quad \sqrt{2} = [1, (2)],$$

savoir

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \\ \frac{3363}{2378}, \frac{8119}{5741}, \frac{19601}{13860}, \frac{47321}{33461}, \dots \end{array} \right.$$

il résulte les formules récursives

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n = 2A_{n-1} + A_{n-2} \\ B_n = 2B_{n-1} + B_{n-2}. \end{array} \right.$$

Il est très intéressant que THÉON DE SMYRNE¹ (Theon

¹ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 14 (1882), p. 132—133.

Smyrnaeus) a connu les relations numériques

$$2 \cdot 1^2 - 1^2 = 1^2, 2 \cdot 5^2 - 1 = 7^2, 2 \cdot 29^2 - 1 = 41^2, 2 \cdot 169^2 - 1 = 239^2;$$

c'est pourquoi nous avons rattaché à son nom l'équation de FERMAT dont il s'agit ici.

Remarquons encore, en passant, que M. E. LEMOINE¹ a donné la résolution complète de l'équation (1), sans »appliquer la fraction continue«, mais en cherchant la valeur générale de x_n , déterminée par les formules récursives

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_0 = a, \quad x_1 = b,$$

savoir précisément les formules récursives (4). Or, je ne vois ni la différence entre cette méthode et la méthode ordinaire ni l'avantage de la méthode »nouvelle«.

Revenons maintenant aux nombres A_n et B_n , puis remarquons qu'ils se présentent aussi sous la forme

$$(5) \quad A_n = \varphi_n(1), \quad B_n = \psi_n(1),$$

il résulte immédiatement, en vertu des développements de l'article XI, une suite de relations linéaires, que nous pouvons déduire aussi immédiatement des formules récursives (4), en appliquant la conclusion de m à $m + 1$, savoir:

$$(5) \quad A_n = B_n + B_{n-1}, \quad B_n = A_{n-1} + B_{n-1}$$

$$(6) \quad A_n = \frac{A_{n+1} - A_{n-1}}{2} = \frac{B_{n+1} + B_{n-1}}{2}$$

$$(7) \quad B_n = \frac{A_n + A_{n-1}}{2} = \frac{A_{n+1} - A_n}{2} = \frac{B_{n+1} - B_{n-1}}{2}.$$

On voit, du reste, que les formules (5) se présentent aussi sous cette autre forme

¹ Journal de Ciencias Mathematicas et Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, t. 21, p. 68—76; 1892. Citation d'après Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 24 (1892), p. 179.

$$(8) \quad A_n \pm B_n = B_{n+1}.$$

Quant aux formules non-linéaires, nous citons d'abord celles-ci:

$$(9) \quad B_{n+1}B_{n-1} = B_n^2 + (-1)^n$$

$$(10) \quad 4B_n^4 + A_n^4 = B_{2n}^2 + 1$$

$$(11) \quad B_{n+1}^2 - B_n^2 - 2B_nB_{n+1} = (-1)^n,$$

tirées directement des identités, démontrées dans l'article XI, et c'est la même chose pour ces deux autres formules

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{2n+1} = B_n^2 + B_{n-1}^2 \\ 2B_{2n} = B_{n+1}^2 - B_{n-1}^2. \end{array} \right.$$

Appliquons ensuite l'équation (1), les formules (12) se présentent aussi sous cette autre forme

$$(12 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2B_{2n+1} = A_n^2 + A_{n+1}^2 \\ 4B_{2n} = A_{n+1}^2 - A_{n-1}^2. \end{array} \right.$$

Les formules récursives de LAGRANGE donnent ici

$$(13) \quad B_{2n} = 2A_nB_n$$

$$(14) \quad A_{2n} = A_{2n}^2 + 2B_{2n}^2,$$

d'où, en vertu de l'équation (1),

$$(15) \quad A_{2n} = 2A_n^2 - (-1)^n = 4B_n^2 + (-1)^n,$$

de sorte que la première des formules (6) donnera

$$(16) \quad A_{2n+1} = A_{n+1}^2 - A_n^2 + (-1)^n = 2B_{n+1}^2 - 2B_n^2 - (-1)^n;$$

de plus, nous aurons, en vertu de (11),

$$(17) \quad A_{2n+1} = 4B_nB_{n+1} + (-1)^n.$$

Quant aux formules (15), posons pour abrégier

$$B_{2n} = 2\nu_n, \quad B_{2n+1} = 2\varrho_n + 1,$$

nous aurons

$$(18) \quad A_{4n} = 16\nu_n^2 + 1, \quad A_{4n+2} = 16q_n(q_n + 1) + 3.$$

Soit maintenant p un facteur premier de A_{2n} , on voit, en vertu de (14), que le nombre -2 est résidu quadratique de p , ce qui donnera, en vertu de la dernière des formules (15):

I. Les facteurs premiers des A_{4n} sont tous de la forme $8\nu + 1$, tandis que les facteurs premiers des A_{4n+2} sont ou de la forme $8\nu + 1$ ou de la forme $8\nu + 3$.

On voit, en vertu de (3), que le nombre premier 3 est du rang 4; c'est-à-dire que les B_{4n} et les A_{4n+2} représentent l'ensemble des B_m et des A_m qui sont divisibles par 3.

On voit de même que le nombre premier 5 est du rang 3, de sorte qu'une puissance quelconque de 5 est du rang impair, et il résulte donc, en vertu des remarques faites sur les nombres (35 bis) de l'article XIII:

II. Les nombres 5^{2q+1} et $2 \cdot 5^q$ sont toujours des bases de première espèce.

Quant au nombre premier 2, il est du rang 2, ce qui donnera la proposition:

III. Soit l'indice n de la forme $2^{\nu}(2q + 1)$, B_n est précisément divisible par 2^{ν} .

De plus, nous aurons à démontrer cette autre proposition:

IV. Soit n un entier, égal à 3 au moins, on aura toujours

$$(19) \quad B_{2n} = 3 \cdot 2^n (a^2 + b^2),$$

où a et b sont de parité différente.

En effet, prenons pour point de départ les valeurs

$$B_4 = 3 \cdot 2^2, \quad A_4 = 4^2 + 1,$$

nous aurons

$$B_8 = 3 \cdot 2^3(4^2 + 1),$$

savoir une expression de la forme (19), et la conclusion de m à $m + 1$ est évidente, parce que A_{2n} se présente toujours sous la forme

$$A_{2n} = p^2 + q^2.$$

Quant aux facteurs premiers des nombres B_{2n+1} , qui sont tous de la forme $4\nu + 1$, M. J. PÉROTT¹, en étudiant l'équation

$$x^2 - 2q^2y^2 = 1,$$

où q est un nombre premier de la forme susdite, a essayé, avec un certain succès, de déterminer la forme de q , de sorte que l'équation susdite soit résoluble en positifs entiers. C'est-à-dire que M. PÉROTT a essayé de déterminer la forme des facteurs premiers des nombres B_{2n+1} , ou, ce qui est la même chose, la forme des nombres premiers du rang impair, pour la base $a = 2$.

Revenons maintenant aux nombres A_n et B_n , il est évident que plusieurs des résultats que nous venons d'obtenir sont intimement liés à l'équation indéterminée

$$(20) \quad x^2 + y^2 = 2z^2,$$

équation qui a, comme solutions générales,

$$\begin{aligned} \pm x &= \alpha^2 - \beta^2 \pm 2\alpha\beta = (\alpha \pm \beta)^2 - 2\beta^2 \\ \pm y &= \alpha^2 - \beta^2 \mp 2\alpha\beta = (\alpha \mp \beta)^2 - 2\beta^2 \\ z &= \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned}$$

où α et β sont premiers entre eux et de parité différente.

Soit maintenant, dans (20), $y = 1$, on aura

$$(21) \quad x = A_{2n+1}, \quad z = B_{2n+1},$$

¹ Journal de Crelle, t. 102, p. 185—223; 1887.

tandis qu'il résulte, en vertu de l'expression de y ,

$$(\alpha \mp \beta)^2 - 2\beta^2 = (-1)^\nu,$$

ce qui donnera

$$\alpha \mp \beta = A_\nu, \quad \beta = B_\nu,$$

savoir

$$\alpha = A_\nu \pm B_\nu = B_{\nu+1}$$

$$\alpha \pm \beta = B_{\nu+1} \pm B_\nu = \pm A_{\nu+1}.$$

Cela posé, la valeur de x deviendra

$$\pm x = A_{\nu+1}^2 - 2B_\nu^2 = A_{\nu+1}^2 - A_\nu^2 + (-1)^\nu,$$

ce qui donnera, en vertu de (16) et (21),

$$\nu = n \text{ ou } \nu = n + 1,$$

et l'on aura donc

$$z = B_{2n+1} = B_n^2 + B_{n+1}^2,$$

savoir la formule (12).

XIX. Des puissances biquadratiques.

Parmi les problèmes qui se rattachent à l'équation de FERMAT

$$x^2 - ay^2 = \pm 1$$

un des plus intéressants est la question si un des nombres x et y peut être un carré exact.

Quant à l'équation de THÉON DE SMYRNE

$$(1) \quad A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n,$$

il est très facile de démontrer la proposition:

I. Le nombre $A_1 = 1$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(2) \quad A_n = p^2.$$

En effet, EULER¹ a démontré que l'équation indéterminée

¹ Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 10 (1738), p. 130—139; 1747.

$$x^4 + 1 = 2y^2,$$

qui correspond à (1) et (2), pour n impair, n'admet qu'une seule solution en nombres entiers, savoir $x = y = 1$, tandis que l'équation

$$x^4 - 1 = 2y^2,$$

qui correspond à (1) et (2), pour n pair, n'admet que la seule solution en nombres entiers $x = 1, y = 0$.

Quant aux B_m , on aura de même:

II. Aucun des nombres B_{2n} ne peut être un carré, savoir l'équation

$$(3) \quad B_{2n} = p^2$$

est impossible.

Remarquons que l'équation (3) n'est autre chose que celle-ci

$$2A_n B_n = p^2,$$

nous aurons, parce que A_n est toujours impair,

$$(4) \quad A_n = r^2, \quad B_n = 2s^2, \quad p = 2rs.$$

Or, la première de ces équations n'est possible que pour $n = 1$, ce qui donnera $B_1 = 1$, et la valeur $2s^2$, indiquée par la seconde des formules (5), n'a aucun sens.

Quant à l'équation

$$(5) \quad B_{2n+1} = p^2,$$

supplémentaire à (3), elle admet des solutions. On aura, en effet,

$$(5 \text{ bis}) \quad B_1 = 1^2, \quad B_7 = 13^2,$$

mais j'ignore s'il y a d'autres solutions de l'équation (5), équivalente à celle-ci

$$(6) \quad x^2 + 1 = 2y^4.$$

La dernière des valeurs spéciales, indiquées dans (5 bis), est assez singulière. En effet, il résulte, en vertu de (1),

$$(7) \quad B_{2n+1}^2 = \left(\frac{A_{2n+1} + 1}{2} \right)^2 + \left(\frac{A_{2n+1} - 1}{2} \right)^2,$$

ce qui donnera la proposition :

III. Le carré de B_{2n+1} est toujours la somme des carrés de deux nombres consécutifs.

Inversement, l'équation indéterminée

$$(8) \quad y^2 = x^2 + (x + 1)^2$$

donnera immédiatement

$$(2x + 1)^2 - 2y^2 = -1,$$

savoir

$$(8 \text{ bis}) \quad y = B_{2n+1}, \quad x = \frac{A_{2n+1} - 1}{2}.$$

Cela posé, les valeurs numériques $B_7 = 169$, $A_7 = 239$ donnent

$$13 = 2^2 + 3^2, \quad 13^4 = 119^2 + 120^2;$$

c'est-à-dire que les deux équations indéterminées simultanées

$$(9) \quad x = y^2 + (y + 1)^2, \quad x^4 = z^2 + (z + 1)^2$$

admettent les solutions en positifs entiers

$$x = 13, \quad y = 2, \quad z = 119,$$

mais y en a-t-il d'autres ?

M. E. DE JONQUIÈRES¹ a postulé que les deux équations indéterminées simultanées

$$(10) \quad x = y^2 + (y + 1)^2, \quad x^2 = z^2 + (z + 1)^2$$

n'admettent, abstraction faite de la solution triviale $x = 1$, $y = z = 0$, qu'une seule solution en positifs entiers, savoir :

$$x = 5, \quad y = 1, \quad z = 3;$$

c'est-à-dire que les nombres

¹ Nouvelles Annales (2) t. 17, pp. 241—247, 289—310; 1878.

$$B_1 = 1, B_3 = 5$$

représentent les seules solutions possibles de l'équation

$$(11) \quad B_{2n+1} = p^2 + (p+1)^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(11 \text{ bis}) \quad 2B_{2n+1} = (2p+1)^2 + 1,$$

mais, malheureusement la démonstration de M. DE JONQUIÈRES est fautive.

En effet, B_{2n+1} étant la somme de deux carrés, il est possible de déterminer une expression de la forme

$$B_{2n+1} = x^2 + y^2,$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (7),

$$x^2 - y^2 = \frac{A_{2n+1} \pm 1}{2}, \quad 2xy = \frac{A_{2n+1} \mp 1}{2},$$

mais le géomètre distingué suppose que x et y soient les valeurs déterminées par la formule (11), ce qui est naturellement inadmissible.

On voit que cette faute est analogue à celle mentionnée dans l'article XVI, concernant la démonstration des propositions de FERMAT.

Du reste, la démonstration de M. DE JONQUIÈRES serait rigoureuse, pourvu que la représentation de B_{2n+1} sous forme d'une somme de deux carrés n'admette qu'une seule solution, ce qui n'a cependant pas lieu, nous le verrons dans l'article XXXI.

Or, on n'a pas encore réussi, que je sache, à démontrer ce fameux postulat de M. DE JONQUIÈRES; c'est-à-dire que les résultats, qu'en ont tirés LUCAS¹ et GERONO² ne sont point démontrés jusqu'ici.

¹ Nouvelles Annales (2) t. 18, p. 74—77; 1879.

² Ibid. (2) t. 17. p. 381—383; 1878.

Revenons maintenant à l'équation (5), il résulte, en vertu de la formule (12) de l'article précédent,

$$(12) \quad p^2 = B_n^2 + B_{n+1}^2,$$

ce qui donnera

$$(12 \text{ bis}) \quad p = \alpha^2 + \beta^2, \quad B_{2\nu} = 2\alpha\beta, \quad B_{2\nu+1} = \alpha^2 - \beta^2,$$

où il faut supposer $2\nu = n$ ou $2\nu = n + 1$, selon que n est pair ou impair, mais comment déterminer ces deux positifs entiers α et β ?

Chose curieuse, l'équation (11) se présente aussi dans cet autre théorème:

IV. Soit p un nombre premier, et soit

$$(13) \quad A_{4n+2} = px^2,$$

p est nécessairement de la forme $8\nu + 3$, et B_{2n+1} se présente sous forme d'une somme des carrés de deux nombres consécutifs.

En effet, la formule (13) donnera, en vertu de la formule (15) de l'article précédent,

$$(14) \quad px^2 = (2B_{2n+1} + 1)(2B_{2n+1} - 1).$$

Or, le premier des facteurs qui figurent au second membre de (14) étant de la forme $4\nu + 3$, le second, au contraire, de la forme $4\nu + 1$, il est évident que p est de la forme $8\nu + 3$, parce que A_{4n+2} n'est jamais, en vertu de la proposition I de l'article précédent, divisible par un nombre premier de la forme $8\nu + 7$.

Cela posé, il résulte, en vertu de (14)

$$2B_{2n+1} \pm 1 = pt^2, \quad 2B_{2n+1} \mp 1 = u^2, \quad x = tu,$$

ce qui donnera

$$pt^2 = u^2 \pm 2, \quad 4B_{2n+1} = pt^2 + u^2,$$

où il faut lire, au second membre de la première de ces formules, $u^2 + 2$, parce que 2 n'est pas résidu quadratique du nombre premier $p = 8\nu + 3$, de sorte que nous aurons

$$(15) \quad pt^2 = u^2 + 2, \quad 4B_{2n+1} = pt^2 + u^2$$

savoir

$$(16) \quad 2B_{2n+1} = u^2 + 1, \quad B_{2n+1} = \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-1}{2}\right)^2,$$

ce qui est précisément la formule (11), mais il faut remarquer que le nombre u est ici une solution de la première des formules (15), savoir d'une forme particulière.

Quant à la formule (15) en question, nous la connaissons déjà du théorème IV de l'article IV, et nous la retrouvons encore une fois, dans l'article XXIII.

Revenons maintenant aux formules (16), nous connaissons deux solutions de ces équations, savoir

$$B_1 = 1, \quad u = 1; \quad B_3 = 5, \quad u = 3,$$

ce qui donnera, comme solutions de (13),

$$(17) \quad A_2 = 3 \cdot 1^2; \quad A_6 = 11 \cdot 3^2.$$

Or, supposons vrai le postulat de M. E. DE JONQUIÈRES, ces deux valeurs représentent les seules solutions possibles de l'équation (13).

Quant aux nombres B_{2n} , nous avons à démontrer le théorème:

V. Soit p un nombre premier, l'équation

$$(18) \quad B_{2n} = px^2$$

n'admet que deux solutions, savoir

$$(18 \text{ bis}) \quad \begin{cases} p = 2, & n = 1, & x = 1, & B_2 = 2 \cdot 1^2 \\ p = 3, & n = 2, & x = 2, & B_4 = 3 \cdot 2^2. \end{cases}$$

Soit tout d'abord $p = 2$, on aura, en vertu de (18),

$$A_n B_n = x^2,$$

ce qui donnera

$$A_n = r^2, \quad B_n = s^2, \quad x = rs.$$

Or, la première de ces expressions n'étant admissible que pour $n = 1$, on aura $r = s = x = 1$, savoir la première des solutions (18 bis).

Soit ensuite, dans (18), p un nombre premier impair, x est nécessairement un nombre pair, de sorte que B_{2n} est divisible par 4, ce qui exige que n soit un nombre pair, savoir $n = 2\nu$. Posons ensuite $x = 2z$, l'équation (18) se présente sous la forme

$$(19) \quad 2pz^2 = A_{2\nu} B_{2\nu}.$$

Supposons maintenant $A_{2\nu}$ divisible par le nombre premier p , nous aurons

$$A_{2\nu} = pr^2, \quad B_{2\nu} = 2s^2, \quad z = rs, \quad x = 2rs,$$

et la valeur de $B_{2\nu}$ est précisément celle que nous venons de déterminer, savoir la première des solutions (18 bis), de sorte que nous aurons

$$\nu = s = 1, \quad A_2 = pr^2 = 3,$$

ce qui donnera

$$p = 3, \quad r = s = 1, \quad x = 2,$$

savoir la seconde des solutions (18 bis).

Supposons, en second lieu, p et A_{2n} premiers entre eux, il résulte, en vertu de (18),

$$A_{2\nu} = r^2, \quad B_{2\nu} = 2ps^2, \quad z = rs, \quad x = 2rs,$$

ce qui est impossible, parce que $A_{2\nu}$ ne peut jamais être un carré.

Cela posé, la première des solutions (18 bis) donnera :

VI. L'équation indéterminée

$$(20) \quad x^2 - 8y^4 = 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(20 \text{ bis}) \quad x = 3, y = 1.$$

On voit que ce corollaire n'est autre chose que la célèbre proposition de FERMAT¹:

VII. Le nombre 1 est le seul nombre trigone qui soit une puissance biquadratique.

En effet, l'équation

$$x(x + 1) = 2y^4,$$

savoir

$$(2x + 1)^2 = 8y^2 + 1,$$

n'est autre chose que l'équation (20), donc nous aurons, comme la seule solution possible de l'équation proposée, $x = y = 1$.

Cette proposition de FERMAT a été retrouvée par EULER² et LEGENDRE³, néanmoins elle est parfois attribuée à ce dernier géomètre⁴.

Comme application de la proposition VI, nous avons à démontrer cette autre:

VIII. L'équation indéterminée

$$(21) \quad x^4 - 8x^2y^2 + 8y^4 = 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(21 \text{ bis}) \quad x = y = 1.$$

On aura, en effet, en vertu de (21),

¹ Œuvres, t. II, p. 402.

² Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 10 (1738), p. 140—141; 1747.

³ Théorie des Nombres, t. p. 7.

⁴ Voir par exemple GERONO: Nouvelles Annales (2) t. 16, p. 230—234; 1877.

$$x^2 = 4y^2 \pm \sqrt{8y^4 + 1},$$

ce qui donnera, en vertu de (20), le résultat susdit.

Remarquons, en passant, que le P. Th. PEPIN¹ a étudié l'équation

$$x^4 - 8x^2y^2 + 8y^4 = z^4,$$

de laquelle (21) est un cas très spécial.

Quant à la seconde des solutions (18 bis), elle donnera le corollaire:

IX. L'équation indéterminée

$$(22) \quad x^2 - 18y^4 = 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(22 \text{ bis}) \quad x = 17, \quad y = 2.$$

En terminant cet article, nous avons encore à donner la proposition:

X. Soit p un positif entier, sans facteurs quadratiques, une expression de la forme

$$(23) \quad A_{2n}(2) = px^2$$

est impossible, à moins que

$$(23 \text{ bis}) \quad x = B_r(p), \quad 2B_n(2) = A_r(p).$$

La formule (23) donnera, en effet, en vertu de la dernière des expressions (15) de l'article XVIII,

$$4B_n^2(2) + (-1)^n = px^2,$$

savoir

$$(2B_n(2))^2 - px^2 = (-1)^{n-1},$$

ce qui donnera immédiatement les relations (23 bis).

¹ Memoire della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. 14, p. 71—85; 1898. Citation d'après Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 29 (1898). p. 158—159.

Soit n un nombre pair, on voit que p est nécessairement une base de première espèce.

XX. Des nombres A_n .

Dans l'article XVIII, nous avons démontré que A_{2n} est toujours un nombre de la forme $2p^2 \pm 1$. Quant aux nombres A_{2n+1} nous avons à démontrer les deux théorèmes:

I. Le nombre

$$(1) \quad A_1 = 1$$

représente la seule solution possible de l'équation

$$(2) \quad A_{2n+1} = 2p^2 + 1.$$

II. Les nombres

$$(3) \quad A_1 = 1, \quad A_3 = 7$$

représentent les seules solutions possibles de l'équation

$$(4) \quad A_{2n+1} = 2p^2 - 1.$$

Ces deux théorèmes sont, en effet, des conséquences immédiates des formules (16) de l'article XVIII, savoir

$$(5) \quad A_{2n+1} = A_{n+1}^2 - A_n^2 + (-1)^n = 2B_{n+1}^2 - 2B_n^2 - (-1)^n,$$

car les formules (2) et (4) donnent toujours, quelle que soit la parité de n , une des deux équations

$$B_{n+1}^2 - B_n^2 = p^2$$

$$A_{n+1}^2 - A_n^2 = 2p^2,$$

d'où il résulte, en vertu des formules (5) et (7) de l'article XVIII,

$$(6) \quad A_n A_{n+1} = p^2$$

$$(7) \quad 2B_n B_{n-1} = p^2.$$

Cela posé, il résulte, en vertu du théorème I de l'article précédent, que la formule (6) n'est possible que pour

$p = 1$, ce qui donnera la première des solutions (3). Quant à l'équation (7), on aura

$$(8) \quad B_{2\nu} = 2r^2, \quad B_{2\nu+1} = s^2, \quad p = 2rs,$$

où $2\nu = n$ ou $2\nu = n - 1$, selon que n est pair ou impair, ce qui donnera, en vertu du théorème V de l'article précédent, $\nu = 1$, $r = 1$.

Or, $B_3 = 5$ n'étant pas un carré, la seconde des équations (8) donnera $B_1 = 1$, $s = 1$, savoir $p = 2$, et l'on trouve donc la seconde des solutions (3). Remarquons encore que l'hypothèse $\nu = 0$ donnera, en vertu de (8), $r = 0$, $s = 1$, $p = 1$, savoir la solution (1).

Introduisons maintenant, dans l'équation de THÉON,

$$A_{2n+1} = 2x^2 \pm 1, \quad B_{2n+1} = y,$$

il résulte, en vertu des deux théorèmes I et II, le corollaire:

III. L'équation indéterminée

$$(9) \quad x^4 + (x^2 + 1)^2 = y^2$$

n'est pas résoluble en nombres entiers, abstraction faite de la solution triviale $x = 0$, $y = 1$, tandis que l'équation analogue

$$(9 \text{ bis}) \quad x^4 + (x^2 - 1)^2 = y^2$$

admet deux solutions en positifs entiers, savoir

$$x = y = 1; \quad x = 2, \quad y = 5.$$

Dans l'article XVIII, nous avons aussi démontré que les A_{2n} se présentent toujours sous la forme $4p^2 \pm 1$. Quant aux nombres A_{2n+1} , nous avons à démontrer les deux théorèmes:

IV. Le nombre $A_1 = 1$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(10) \quad A_{2n+1} = 4p^2 + 1.$$

V. Aucun des nombres A_{2n+1} ne se présente sous la forme

$$(11) \quad A_{2n+1} = 4p^2 - 1.$$

En effet, les formules (5) donnent ici une de ces deux équations

$$B_{n+1}B_n = 2p^2$$

$$A_nA_{n-1} = 4p^2.$$

Or, la dernière de ces équations est impossible, parce que les A_{2n} sont des nombres impairs, tandis que la première n'est possible que pour la valeur triviale $n = 0$, ce qui donnera $p = 0$, savoir la solution $A_1 = 1$ de l'équation (10).

Cela posé, on aura ici le corollaire:

VI. L'équation indéterminée

$$(12) \quad (2x^2)^2 + (2x^2 \pm 1)^2 = y^2$$

n'est pas résoluble en positifs entiers, abstraction faite de la solution triviale $x = 0, y = 1$.

On voit que le théorème II n'est autre chose qu'une proposition fameuse, indiquée par FERMAT¹, dans une lettre adressée à FRENICLE, savoir:

VII. Les équations indéterminées simultanées

$$(13) \quad x = 2y^2 - 1, \quad x^2 = 2z^2 - 1$$

admettent seulement deux solutions en positifs entiers, savoir

$$(13 \text{ bis}) \quad x = y = z = 1; \quad x = 7, \quad y = 2, \quad z = 5.$$

Cette proposition de FERMAT est très intéressante, et il

¹ Œuvres, t. II, p. 434.

semble que le grand géomètre en a communiqué sa démonstration, ce qui est très rare.

En effet, d'après LUCAS¹, on lit dans les manuscrits de BOUILLIOU (Bullialdus):

»M. Fermat a envoyé à M. Frenicle la démonstration par laquelle il prouve qu'il n'y a aucun autre nombre que le seul 7 qui, estant le double d'un carré — 1, soit la racine quarrée de la mesme nature (c'est-à-dire qui soit le double d'un carré — 1).

7 est double du quarré 4, — 1, c'est-à-dire, 8 — 1, et son quarré 49 est le double du quarré 25, — 1, c'est-à-dire 50 — 1.«

Or, la lettre de FERMAT et la réponse de FRENICLE semblent toutes deux perdues, et la proposition susdite de FERMAT a causé beaucoup de difficultés aux géomètres qui ont cherché de la démontrer, mais en vain². Le P. PEPIN³ a par exemple indiqué que, si les équations indéterminées simultanées (13) ont d'autres solutions que celles indiquées par FERMAT, savoir les nombres (13 bis), ces solutions contiennent au moins 3849 chiffres.

Or, au moment où le P. PEPIN a publié sa Note susdite, deux géomètres ont déjà réussi à résoudre le problème difficile dont il s'agit.

¹ Nouvelles Annales 2, t. 18, p. 75; 1879.

² Voir par exemple la Note de LUCAS dans les Nouvelles Annales, (2) t. 18, p. 74—77; 1879.

³ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 15 (1883), p. 195; t. 16 (1884), p. 154. La Note du P. PEPIN est publiée dans les Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei t. 26 (ou t. 36) p. 23—33; 1884. Les indications du Jahrbuch concernant les numéros des tomes de la publication périodique susdite sont, aux environs de l'année 1884, très confuses. De plus, dans le premier lieu cité, on lit 3848 chiffres, dans le second 3849!

En effet, GERONO¹ a démontré que les seules solutions en positifs entiers de l'équation indéterminée

$$(14) \quad 1 + x + x^2 + x^3 = (x + 1)(x^2 + 1) = y^2$$

sont

$$x = 1, y = 2; \quad x = 7, y = 20,$$

et l'on voit que l'équation (14) se décompose en celles-ci

$$x + 1 = 2m^2, \quad x^2 + 1 = 2n^2, \quad y = 2mn,$$

dont les deux premiers sont identiques à (13).

Or, ni le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*², ni LUCAS, dans sa Note susdite sur la proposition de FERMAT, n'ont remarqué que GERONO a résolu le problème en question.

Plus tard, GENOCCHI³ a trouvé une solution presque identique à celle de GERONO.

XXI. Des nombres B_n .

Il est très intéressant, ce me semble, que les nombres B_{2n+1} ont des propriétés analogues à celles que nous venons de démontrer pour les A_{2n+1} , savoir :

I. Les nombres

$$(1) \quad B_1 = 1, \quad B_3 = 5$$

représentent les seules solutions possibles de l'équation.

$$(1 \text{ bis}) \quad B_{2n+1} = 4p^2 + 1.$$

En effet, appliquons le théorème II de l'article XVIII, il s'agit de résoudre les deux équations indéterminées simultanées

¹ Nouvelles Annales (2) t. 16, p. 230—234; 1877.

² Voir t. 9 (1877), p. 137.

³ *Jahrbuch*, t. 15 (1883), p. 145. La démonstration est reproduite, sans commentaires, dans les *Nouvelles Annales* (3) t. 2, p. 306—310; 1885.

$$(2) \quad x = 4p^2 + 1, \quad x^2 = y^2 + (y + 1)^2.$$

Soit tout d'abord y un nombre pair, on aura donc

$$(3) \quad y = 2\alpha\beta, \quad y + 1 = \alpha^2 - \beta^2, \quad x = \alpha^2 + \beta^2,$$

ce qui donnera

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 1, \quad x = 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(3 \text{ bis}) \quad (\alpha - \beta)^2 - 2\beta^2 = 1, \quad \alpha - \beta = A_{2\nu}, \quad \beta = B_{2\nu}.$$

Cela posé, il résulte, en vertu des deux expressions de x ,

$$(4) \quad 2p^2 = \beta(\beta + \alpha) = B_{2\nu}A_{2\nu+1},$$

équation qui n'est pas résoluble en positifs entiers, de sorte qu'il ne nous reste que la solution triviale de (3 bis), savoir $\alpha = 1, \beta = 0$, ce qui donnera

$$y = p = 0, \quad x = 1 = B_1.$$

Soit, en second lieu, dans (2), y un nombre impair, on aura

$$y + 1 = 2\alpha\beta, \quad y = \alpha^2 - \beta^2, \quad x = \alpha^2 + \beta^2,$$

savoir

$$(\beta + \alpha)^2 - 2\alpha^2 = 1, \quad x = 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 1,$$

ce qui donnera

$$(4 \text{ bis}) \quad \beta + \alpha = A_{2\nu}, \quad \alpha = B_{2\nu}, \quad 2p^2 = B_{2\nu}A_{2\nu-1},$$

et cette dernière équation n'étant possible que pour $\nu = 1$, on aura donc

$$p = 1, \quad x = 5 = B_3.$$

GERONO¹ a résolu les deux équations indéterminées simultanées (2), sans remarquer qu'elles se rattachent à l'équation de THÉON.

II. Le nombre $B_1 = 1$ représente la seule solution possible de l'équation

¹ Nouvelles Annales (2) t. 17, p. 521—523; 1878.

$$(5) \quad B_{2n+1} = 2p^2 + 1.$$

Il est évident que la démonstration de ce théorème est analogue à celle que nous venons d'établir pour le théorème précédent. Il faut simplement remplacer les équations (4) et (4 bis) par celles-ci

$$p^2 = B_{2\nu} A_{2\nu+1}, \quad p^2 = B_{2\nu} A_{2\nu-1},$$

équations qui sont impossibles pour une valeur positive de l'indice ν , de sorte qu'il ne nous reste que la solution triviale $p = 0, x = 1 = B_1$.

III. L'équation

$$(6) \quad B_{2n+1} = 4p^2 - 1$$

est impossible.

En effet, soit y un nombre pair, la dernière des équations (2) donnera

$$\beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta - 1, \quad x = 2\alpha^2 - 2\alpha\beta - 1,$$

de sorte que nous aurons

$$\alpha - \beta = A_{2\nu}, \quad \beta = B_{2\nu}, \quad 2p^2 = A_{2\nu} B_{2\nu+1},$$

ce qui est impossible.

L'hypothèse y impair donnera de même

$$\alpha^2 = \beta^2 + 2\alpha\beta - 1, \quad x = 2\beta^2 + 2\alpha\beta - 1,$$

savoir

$$\beta + \alpha = A_{2\nu}, \quad \alpha = B_{2\nu}, \quad 2p^2 = B_{2\nu-1} B_{2\nu},$$

ce qui est également impossible.

IV. Le nombre $B_1 = 1$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(7) \quad B_{2n+1} = 2p^2 - 1.$$

La démonstration est tellement analogue aux précédentes qu'il nous semble inutile de l'établir plus amplement.

XXII. Résolution de problèmes diversés.

Les nombres A_n et B_n , étudiés dans les articles précédents, jouent un rôle essentiel dans la Théorie des Nombres, parce qu'ils permettent de résoudre plusieurs problèmes d'une forme simple, problèmes parmi lesquels nous avons à considérer quelques-uns, pour la plupart bien connus.

I. Déterminer un nombre trigone qui soit un carré exact.

L'équation indéterminée dont il s'agit, savoir

$$(1) \quad x(x+1) = 2y^2,$$

se transforme en celle-ci

$$(2x+1)^2 = 8y^2 + 1,$$

ce qui donnera

$$(1 \text{ bis}) \quad x = \frac{A_{2n}-1}{2}, \quad y = \frac{B_{2n}}{2},$$

et ces nombres donnent aussi la solution complète de ces deux autres équations indéterminées

$$(3) \quad \begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + x = y^2 \\ 1^3 + 3^3 + 3^3 + \dots + x^3 = y^4. \end{cases}$$

II. Déterminer deux nombres trigones, dont le premier soit le double du second.

Dans ce cas, il s'agit de résoudre l'équation indéterminée

$$(3) \quad x(x+1) = 2y(y+1),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2x+1)^2 = 2(2y+1)^2 - 1,$$

de sorte que nous aurons

$$(3 \text{ bis}) \quad x = \frac{A_{2n+1}-1}{2}, \quad y = \frac{B_{2n+1}-1}{2},$$

et il est évident que ces nombres donnent aussi la solution complète de ces deux autres équations indéterminées

$$(4) \begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + x = 2(1 + 2 + 3 + \dots + y). \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + x^3 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + y^3). \end{cases}$$

Dans l'«*Educational Times*»¹ on a traité le problème plus général

$$x(x+1) = ny(y+1),$$

où n est un positif entier; cependant la solution donnée de ce problème ne me paraît pas complète, et je me réserve de revenir à l'équation susdite, dans une autre occasion.

III. Déterminer un nombre x qui soit un carré plus ou moins un, tel que $2x$ ait la même propriété.

Les équations indéterminées simultanées

$$(5) \quad x = y^2 \pm 1, \quad 2x = z^2 \pm 1$$

donnent immédiatement

$$z^2 - 2y^2 = \pm 1,$$

savoir

$$(5 \text{ bis}) \quad z = A_n, \quad y = B_n, \quad x = B_n^2 + (-1)^n = B_{n+1}B_{n-1}.$$

IV. Déterminer un nombre x qui soit un carré plus ou moins un, tandis que $2x$ soit un carré moins ou plus 2.

Ici nous avons à résoudre les équations indéterminées simultanées

$$x = y^2 \pm 1, \quad 2x = z^2 \mp 2,$$

savoir

$$2y^2 = z^2 \mp 4,$$

de sorte que y et z sont tous deux des nombres pairs. Posons $y = 2\beta$, $z = 2\alpha$, il résulte

¹ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 32 (1901), p. 197.

$$2\beta^2 = \alpha^2 \mp 1,$$

et nous aurons donc

$$\alpha = A_n, \beta = B_n, y = 2B_n, z = 2A_n,$$

d'où il résulte finalement

$$(6 \text{ bis}) \quad x = 4B_n^2 + (-1)^n = A_{2n}.$$

V. Déterminer un carré, dont le double soit un carré plus ou moins 4.

L'équation indéterminée

$$(7) \quad 2x^2 = y^2 \pm 4$$

montre clairement que x et y sont tous deux des nombres pairs. Posons $x = 2\alpha$, $y = 2\beta$, nous aurons

$$\beta^2 - 2\alpha^2 = \mp 1,$$

ce qui donnera

$$(7 \text{ bis}) \quad x = 2B_n, \quad y = 2A_n.$$

VI. Déterminer deux carrés consécutifs, dont la somme soit un carré.

L'équation indéterminée

$$(8) \quad x^2 + (x+1)^2 = y^2,$$

savoir

$$(2x+1)^2 - 2y^2 = -1$$

est déjà résolue, dans l'article XIX; on aura

$$(8 \text{ bis}) \quad x = \frac{A_{2n+1}-1}{2}, \quad x+1 = \frac{A_{2n+1}+1}{2}, \quad y = B_{2n+1}.$$

Considérons maintenant un triangle rectangulaire, dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, il est évident que l'équation (8) détermine de tels triangles, dont les cathètes ont la différence un.

Posons pour abrégé

$$(9) \quad a_n = \frac{A_{2n-1} - 1}{2}, \quad b_n = B_{2n-1}, \quad n \geq 1,$$

la solution complète de l'équation indéterminée (8) est représentée par les valeurs

$$(10) \quad x = a_n, \quad y = b_n.$$

Or, les formules récursives de LAGRANGE

$$A_{2n+1} = 3A_{2n-1} + 4B_{2n-1}$$

$$B_{2n+1} = 2A_{2n-1} + 3B_{2n-1}$$

donnent, en vertu de (9), ces autres formules récursives

$$(11) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 1 \\ b_{n+1} = 4a_n + 3b_n + 2 \end{cases}$$

qui permettent de déterminer successivement les nombres a_m et b_m , à l'aide de la solution triviale $a_0 = 0$, $b_1 = 1$.

La première des formules (11) est due à M. TH. MUIR¹; quant à la seconde, elle montre que l'équation indéterminée

$$(12) \quad 3x + 4y + 2 = u^2 + v^2$$

est résoluble en positifs entiers. Mais il me semble un problème très difficile de déterminer toutes les valeurs positives entières de x , y , u , v qui satisfont à cette équation, ce qui exige, en effet, de déterminer toutes les représentations de la forme

$$B_{2n+1} = u^2 + v^2,$$

et je ne crois pas que la solution de l'équation (12), donnée dans l'«Educational Times»² soit complète.

¹ Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, t. 23, p. 264—267; 1901.

² Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 35 (1904), p. 206—207.

VII. Démontrer que $x = 1$, $x = 5$ sont les seuls positifs entiers qui satisfassent aux deux conditions

$$(13) \quad x = y^2 + 1, \quad 2x^2 = u^2 + 1.$$

On aura

$$u = A_{2n+1}, \quad x = B_{2n+1},$$

et le théorème I de l'article précédent montre que la première des équations (13) n'est possible que pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui donnera précisément $x = 1$, $x = 5$.

Cela posé, il résulte, en vertu de (5), que $x = 1$ et $x = 5$ sont les seuls positifs entiers qui satisfassent aux trois conditions

$$(14) \quad x = y^2 + 1, \quad 2x = z^2 + 1, \quad 2x^2 = t^2 + 1,$$

et l'on voit que les deux premières de ces équations donnent une infinité de solutions, tandis que la première et la dernière ne donnent que les deux solutions susdites.

Quant aux deux dernières des équations (14), il est évident que z et t sont tous deux des nombres impairs. Posons $z = 2\alpha + 1$, $t = 2\beta + 1$, il résulte

$$x = \alpha^2 + (\alpha + 1)^2, \quad x^2 = \beta^2 + (\beta + 1)^2,$$

savoir le problème de M. E. DE JONQUIÈRES, problème qui se présente par conséquent aussi sous cette autre forme

$$(15) \quad x = \frac{z^2 + 1}{2}, \quad x^2 = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

Enfin, nous avons à résoudre un problème, regardé mais pas résolu par MORET-BLANC¹ et par LUCAS², savoir:

VIII. Démontrer que les équations indéterminées simultanées

$$(16) \quad x = 6y^2, \quad x + 1 = z^2, \quad 2x + 1 = u^2$$

¹ Nouvelles Annales (2) t. 15, p. 46—48; 1875.

² Ibid. (2) t. 17, p. 381; 1877.

n'admettent qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(16 \text{ bis}) \quad x = 24, \quad y = 2, \quad z = 5, \quad u = 7.$$

On voit, en éliminant x , que le système (16) est équivalent à deux des trois équations suivantes, prises arbitrairement,

$$(17) \quad u^2 - 2z^2 = -1$$

$$(18) \quad u^2 - 3(2y)^2 = 1$$

$$(19) \quad z^2 - 6y^2 = 1$$

Étudions tout d'abord les deux premières de ces équations, il résulte, en vertu de (17),

$$(20) \quad u = A_{2n+1}(2), \quad z = B_{2n+1}(2),$$

tandis que la seconde donnera

$$(21) \quad u \pm 1 = 2\alpha^2, \quad u \mp 1 = 3\beta^2, \quad y = \alpha\beta.$$

Or, la première de ces expressions n'est, en vertu des théorèmes I et II de l'article XX, possible que pour

$$u = 1, \quad \alpha = 0, \quad 1 = 3\beta^2$$

$$u = \alpha = 1, \quad \beta = 0$$

$$u = 7, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1,$$

et l'on voit que le premier de ces systèmes est inadmissible, que le second donnera la solution triviale $x = y = 0$, $z = u = 1$, tandis que le troisième conduira à la solution indiquée par les formules (16 bis).

LUCAS, en étudiant les équations (16), donne seulement $u + 1 = 2\alpha^2$ au lieu de la première des formules (21).

Remarquons encore que les équations (17) et (18) donnent immédiatement la proposition:

IX. L'équation

$$(22) \quad A_{2n+1}(2) = A_{2\nu}(3)$$

n'admet qu'une seule solution, savoir

$$(22 \text{ bis}) \quad n = \nu = 1, \quad A_3(2) = A_2(3) = 7$$

En second lieu, les équations (18) et (19) donnent cette autre proposition:

X. L'équation

$$(23) \quad B_n(6) = B_\nu(12) = \frac{1}{2} B_{2\varrho}(3)$$

ne donne que la seule solution

$$(23 \text{ bis}) \quad n = \nu = \varrho = 1, \quad B_1(6) = B_1(12) = \frac{1}{2} B_2(3) = 2.$$

MORET-BLANC, dans son essai maladroit de résoudre les équations (16) indique empiriquement la proposition X.

Quant aux équations (17) et (19), elles donnent la proposition:

XI. L'équation

$$(24) \quad B_{2n+1}(2) = A_\nu(6)$$

n'admet qu'une seule solution, savoir

$$(24 \text{ bis}) \quad n = \nu = 1, \quad B_3(2) = A_1(6) = 5.$$

Enfin, nous aurons, en multipliant les deux premières des équations (16), puis appliquant la troisième, cette autre proposition que nous avons à étudier plus amplement dans les articles XXVI et XXVIII:

XII. L'équation indéterminée

$$(25) \quad u^4 - 24t^2 = 1$$

n'a qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(25 \text{ bis}) \quad u = 7, \quad t = 10.$$

CHAPITRE VI

Des puissances d'un nombre premier.

XXIII. De la base $a = (2\nu + 1)^{2q+1}$.

Dans les articles VIII et X, nous avons déjà mentionné un théorème concernant les nombres premiers de la forme $4\nu + 1$, théorème que nous avons à démontrer ici, à un autre point de vue, savoir:

I. Soit $4\nu + 1$ un nombre premier, la puissance impaire $(4\nu + 1)^{2q+1}$ est toujours une base de première espèce, donc l'équation de Fermat

$$(1) \quad x^2 - (4\nu + 1)^{2q+1} y^2 = -1$$

est résoluble en positifs entiers.

A cet effet, nous désignons par $2\sigma + 1$ un nombre premier impair quelconque, il est évident que l'équation de FERMAT

$$(2) \quad x^2 - ay^2 = 1, \quad a = (2\sigma + 1)^{2q+1}, \quad q \geq 0,$$

est toujours résoluble en positifs entiers.

Cela posé, nous désignons par x et y les plus petites des solutions de l'équation (2), ou, ce qui est la même chose,

$$(3) \quad (x + 1)(x - 1) = ay^2.$$

Soit maintenant x un nombre pair, les deux facteurs $x + 1$ et $x - 1$ sont premiers entre eux, donc on aura, en vertu de (3),

$$(4) \quad x \pm 1 = ap^2, \quad x \mp 1 = q^2, \quad y = pq,$$

ce qui donnera

$$(5) \quad 2x = ap^2 + q^2, \quad q^2 - ap^2 = \mp 2,$$

d'où

$$(6) \quad x = q^2 \pm 1 = ap^2 \mp 1.$$

Soit, au contraire, x un nombre impair, les deux facteurs $x + 1$ et $x - 1$ ont le plus grand commun diviseur 2, et l'on aura, en vertu de (3),

$$(7) \quad x \pm 1 = 2ap^2, \quad x \mp 1 = 2q^2, \quad y = 2pq$$

ce qui donnera

$$(8) \quad x = 2q^2 \pm 1 = 2ap^2 \mp 1,$$

d'où

$$(9) \quad x = ap^2 + q^2, \quad q^2 - ap^2 = \mp 1.$$

Cela posé, nous avons à étudier séparément les deux hypothèses σ pair et σ impair.

Soit tout d'abord σ un nombre pair, le nombre premier en question est de la forme $4\nu + 1$, et il est évident que la dernière des équations (5) est impossible, parce que son premier membre est multiple de 4; c'est-à-dire qu'il ne nous reste, dans ce cas, que les formules (7).

Or, x et y étant les plus petites solutions en positifs entiers de l'équation (2), on aura nécessairement, en vertu de la dernière des formules (9),

$$(10) \quad q^2 - ap^2 = -1;$$

c'est-à-dire que l'équation (1) est résoluble en positifs entiers, et a est par conséquent une base de première espèce.

Remarquons, en passant, que la formule (10) donnera

$$q = A_1, \quad p = B_1,$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (7) et (8),

$$y = 2A_1B_1 = B_2, \quad x = 2A_1^2 + 1 = A_2.$$

Soit ensuite σ un nombre impair, le nombre premier est de la forme $4\nu + 3$, et la puissance $(4\nu + 3)^{2\sigma+1}$ est une base de seconde espèce, ce qui exclut la dernière des formules (9), parce que x et y sont les plus petites solutions de l'équation (2); c'est-à-dire qu'il ne nous reste que les équations (5).

Cela posé, nous retrouvons évidemment les formules de l'article IV, mais la méthode que nous venons d'appliquer ici ne donne aucun éclaircissement sur la nature des nombres p et q , qui figurent dans les expressions de x et y , savoir de A_1 et B_1 , indiquées dans les formules (4) et (6).

Remarquons, en passant, que la dernière des formules (5) se rattache au théorème IV de l'article XIX.

Du reste, notre démonstration du théorème I n'est qu'une légère modification de celle que LEGENDRE¹ a appliquée pour établir le cas spécial du théorème susdit qui correspond à $\varrho = 0$.

Revenons maintenant au cas général, nous aurons à démontrer quelques autres théorèmes concernant l'équation de FERMAT

$$(11) \quad x^2 - ay^2 = \pm 1, \quad a = (2\nu + 1)^{2\sigma+1},$$

où $2\nu + 1$ est un nombre premier.

II. Une équation de la forme

$$(12) \quad A_m(a) = 2\alpha^2 \pm 1$$

n'est jamais possible pour m impair.

Étudions tout d'abord l'équation (11) qui correspond à la valeur -1 au second membre, a est une base de première espèce, et l'indice m de $A_m(a)$ est nécessairement un nombre impair. Introduisons ensuite, dans (11), la valeur (12) de $A_m(a)$, il résulte

¹ Théorie des Nombres, t. I, p. 65, 3^e édition, Paris 1830.

$$4\alpha^2(\alpha^2 \pm 1) = ay^2 - 2,$$

ce qui est impossible et pour y pair et pour y impair.

Quant à la valeur $+1$ au second membre de (11), on aura, en vertu de (12),

$$(13) \quad 4\alpha^2(\alpha^2 \pm 1) = ay^2,$$

et il est évident que α ne peut pas être divisible par le nombre premier $2\nu + 1$, parce que le premier membre de (13) est, dans ce cas, divisible par une puissance paire du nombre premier susdit, tandis que le second membre est divisible par une puissance impaire.

Cela posé, il est évident que y est divisible par 2α , savoir

$$(14) \quad y = 2\alpha z,$$

ce qui donnera, en vertu de (13),

$$\alpha^2 \pm 1 = az^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\alpha = A_p(a), \quad z = B_p(a),$$

donc on aura, en vertu de (14)

$$(15) \quad y = B_{2p}(a), \quad x = A_{2p}(a).$$

Soit le nombre premier de la forme $4\nu + 3$, il résulte de la formule (23) de l'article IV que les A_{2n+1} , tirés de (11), sont toujours un carré plus ou moins un. Quant aux nombres premiers de la forme $4\nu + 1$, nous aurons à démontrer le théorème:

III. Soit, dans l'équation (11), ν un nombre pair, l'équation

$$(16) \quad A_m(a) = \alpha^2 \pm 1, \quad a = (4\nu + 1)^{2q+1},$$

n'est possible pour aucune valeur paire de l'indice m .

Soit, en effet, m un nombre pair, il faut supprimer la valeur -1 au second membre de (11), et l'on aura, en introduisant, au lieu de x , la valeur (16),

$$\alpha^2(\alpha^2 \pm 2) = ay^2.$$

On voit, comme dans la démonstration précédente, que α ne peut pas être divisible par le nombre premier $4\nu + 1$, de sorte que l'on aura nécessairement $y = \alpha z$, ce qui donnera

$$\alpha^2 \pm z = az^2,$$

et cette équation est impossible, parce que son premier membre est de la forme $4\sigma - 1$, le second, au contraire, de la forme $4\tau + 1$.

XXIV. De l'équation $x^4 - ay^2 = 1$.

Soit $2\nu + 1$ un nombre premier, on connaît des équations de FERMAT

$$x^2 - ay^2 = \pm 1, \quad a = (2\nu + 1)^{2q+1},$$

où le nombre x est un carré, ce qui a lieu par exemple pour $a = 5$.

Dans ce cas, on aura en effet

$$9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1, \quad A_2(5) = 3^2, \quad B_2(5) = 2^2,$$

de sorte que x et y sont tous deux des carrés.

Or, il est très intéressant, ce me semble, que les équations indéterminées de la forme

$$(1) \quad x^4 - ay^2 = 1, \quad a = (2\nu + 1)^{2q+1},$$

où $2\nu + 1$ est un nombre premier, se rattachent intimement à l'équation de THÉON DE SMYRNE.

En effet, soit, dans (1), x un nombre pair, on aura

$$x^2 \pm 1 = ap^2, \quad x^2 \mp 1 = q^2, \quad y = pq,$$

et la deuxième de ces équations est impossible; c'est-à-dire que x est nécessairement un nombre impair.

Cela posé, il est évident que $x^2 + 1$ est toujours un nombre de la forme $4\sigma + 2$, tandis que $x^2 - 1$ est multiple de 8, de sorte que nous avons à étudier deux systèmes d'équations indéterminées, savoir

$$(2) \quad x^2 + 1 = 2q^2, \quad x^2 - 1 = 8ar^2, \quad y = 4qr$$

$$(3) \quad x^2 + 1 = 2aq^2, \quad x^2 - 1 = 8r^2, \quad y = 4qr.$$

Or, il résulte de la première des équations (2)

$$x = A_{2n+1}(2), \quad q = B_{2n+1}(2),$$

tandis que la seconde des équations susdites donnera

$$(4) \quad x \pm 1 = 4\alpha^2, \quad x \mp 1 = 2a\beta^2, \quad r = \alpha\beta$$

$$(5) \quad x \pm 1 = 4a\alpha^2, \quad x \mp 1 = 2\beta^2, \quad r = \alpha\beta.$$

Quant aux équations (4), il résulte

$$x = 2\alpha^2 + a\beta^2, \quad 2\alpha^2 - a\beta^2 = \pm 1,$$

ce qui donnera

$$x = A_{2n+1}(2) = 4\alpha^2 \mp 1;$$

mais, dans l'article XX, nous avons démontré que la valeur $4\alpha^2 - 1$ est inadmissible, tandis que la valeur $4\alpha^2 + 1$ exige

$$\alpha = 0, \quad x = 1,$$

ce qui donnera, en vertu de (4), la condition impossible

$$a\beta^2 = 1.$$

Étudions maintenant les équations (5), nous aurons

$$x = \beta^2 + 2a\alpha^2, \quad \beta^2 - 2a\alpha^2 = \mp 1,$$

et, comme dans le cas précédent, en vertu de la première des équations (2),

$$x = A_{2n+1}(2), \quad q = B_{2n+1}(2),$$

ce qui donnera

$$x = A_{2n+1}(2) = 2\beta^2 \pm 1.$$

Or, il résulte des recherches de l'article XX que ces expressions de x ne sont possibles que pour

$$x = 1, \beta = 0; \quad x = 7, \beta = 1,$$

ce qui n'est pas admissible.

Cela posé, il nous reste seulement les équations (3) qui représentent par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'équation (1).

Remarquons maintenant que la première des équations (3) n'est autre chose que celle-ci

$$(6) \quad x^2 - 2aq^2 = -1,$$

nous aurons la proposition essentielle:

I. Supposons résoluble en positifs entiers l'équation (1), l'équation (6) aura nécessairement la même propriété, de sorte que la base a est toujours de la forme

$$(7) \quad a = (4\nu + 1)^{2q+1},$$

où $4\nu + 1$ est un nombre premier.

On voit donc que cette condition nécessaire exclut dès à présent toutes les bases de la forme

$$(8) \quad a = (4\nu + 3)^{2q+1},$$

où $4\nu + 3$ est un premier, mais c'est la même chose pour d'autres valeurs de a .

Soit par exemple $a = 17$, on aura $34 = 6^2 - 2$, ce qui est une base de seconde espèce, et l'équation correspondante (6) n'est pas résoluble en positifs entiers.

On voit du reste que

$$A_{4n}(2) = 4B_{2n}^2(2) + 1$$

est toujours une base de première espèce, tandis que

$$2A_{4n}(2) = 4A_{2n}^2(2) - 2$$

est toujours de seconde espèce.

Revenons maintenant à l'équation (6), nous aurons

$$(9) \quad x = A_{2n+1}(2a), \quad q = B_{2n+1}(2a),$$

tandis que la deuxième des équations (3) donnera

$$(9 \text{ bis}) \quad x = A_{2k}(2), \quad r = \frac{1}{2} B_{2k}(2),$$

donc nous avons démontré le théorème:

II. Soit $4\nu + 1$ un nombre premier, l'égalité

$$(10) \quad x = A_{2n+1}(2a) = A_{2k}(2), \quad a = (4\nu + 1)^{2\nu+1},$$

où les indices n et k sont à déterminer convenablement, représente la condition nécessaire et suffisante pour la résolution en positifs entiers de l'équation proposée (1).

Supposons maintenant remplie la condition (10), puis supposons déterminés les indices n et k , la valeur correspondante de y se détermine, en vertu de la dernière des équations (3), par l'expression

$$(11) \quad y = 4qr = 2B_{2k}(2)B_{2n+1}(2a).$$

Soit particulièrement $a = 5$, la fraction continue

$$\sqrt{10} = [3, (6)]$$

donnera

$$A_1(10) = A_2(2) = 3; \quad B_1(10) = 1, \quad B_2(2) = 2,$$

d'où il résulte

$$x = 3, y = 4, 3^4 - 5 \cdot 2^4 = 1.$$

Remarquons encore que la proposition I donnera immédiatement cette autre :

III. Soit $4\nu + 3$ un nombre premier, l'équation indéterminée

$$(12) \quad x^2 - 4ay^4 = 1, \quad a = (4\nu + 3)^{2q+1},$$

n'est pas résoluble en positifs entiers, ou, ce qui est la même chose, une expression de la forme

$$(13) \quad B_n(a) = 2p^2$$

n'est pas admissible.

Remarquons que, dans (12), x est impair, nous aurons

$$x \pm 1 = 2a\alpha^4, \quad x \mp 1 = 2\beta^4, \quad y = \alpha\beta,$$

ce qui donnera

$$(14) \quad \beta^4 - a\alpha^4 = \mp 1,$$

où il faut par conséquent supprimer le signe supérieur qui figure au second membre, parce que a est une base de seconde espèce, et la proposition I montre clairement que l'équation (14), ainsi obtenue, n'est pas résoluble en positifs entiers.

XXV. De la base $2a = 2(2\nu + 1)^{2q+1}$.

Dans les recherches de l'article précédent, nous avons appliqué l'équation de FERMAT

$$(1) \quad x^2 - 2ay^2 = 1, \quad a = (2\nu + 1)^{2q+1},$$

où $2\nu + 1$ est un nombre premier, c'est pourquoi nous nous sommes proposé d'étudier plus amplement une telle

équation, et nous avons tout d'abord à démontrer le théorème:

I. Soit, avec la définition susdite, $2a$ une base de seconde espèce, l'équation indéterminée

$$(2) \quad 2q^2 - ap^2 = \mp 1$$

est résoluble, et il existe de telles solutions p et q de (2) que les nombres $A_1(2a)$ et $B_1(2a)$ se présentent sous la forme

$$(3) \quad A_1(2a) = 4q^2 \pm 1, \quad B_1(2a) = 2pq,$$

et inversement. Soit $A_1(2a)$ de la forme susdite, $2a$ est toujours une base de seconde espèce.

En effet, remarquons que, dans (1), x est toujours impair, nous aurons à regarder ces deux systèmes d'équations indéterminées

$$(4) \quad x \pm 1 = 2ap^2, \quad x \mp 1 = 4q^2, \quad y = 2pq$$

$$(5) \quad x \pm 1 = 4ap^2, \quad x \mp 1 = 2q^2, \quad y = 2pq.$$

Étudions tout d'abord les équations (4), il résulte

$$(6) \quad x = ap^2 + 2q^2, \quad 2q^2 - ap^2 = \mp 1, \quad x = 4q^2 \pm 1.$$

Quant au système (5), on aura

$$(7) \quad x = q^2 + 2ap^2, \quad q^2 - 2ap^2 = \mp 1,$$

mais la seconde de ces équations est impossible. En premier lieu, il faut supprimer la valeur -1 , parce que $2a$ est une base de seconde espèce, et nous aurons en outre, en vertu de la première des équations (7),

$$x = A_1(2a) > q,$$

ce qui exclut la valeur $+1$ au second membre de la dernière des équations susdites.

Cela posé, il nous reste seulement le système (4), ce qui entraîne précisément les expressions (3) de $A_1(2a)$ et $B_1(2a)$.

Inversement, soit $A_1(2a)$ de la forme (3), il résulte, en vertu de (1),

$$16q^4 \pm 8q^2 = 2ay^2,$$

de sorte que y est un nombre pair, et l'on aura donc

$$(8) \quad q^2(2q^2 \pm 1) = ay_1^2, \quad y = 2y_1.$$

Or, il est évident que les deux facteurs qui figurent au premier membre de (8) sont premiers entre eux, ce qui entraîne que q ne peut pas être divisible par le nombre premier $2\nu + 1$, parce que le premier membre est, dans ce cas, divisible par une puissance paire de ce premier, le second par une puissance impaire.

Cela posé, y_1 est nécessairement divisible par q , savoir $y_1 = qz$, et l'on aura donc

$$2q^2 \pm 1 = az^2,$$

savoir la seconde des équations (6), de sorte que le système (5) est exclu, et $2a$ est par conséquent une base de seconde espèce.

Il est évident que le théorème I est applicable à tous les nombres premiers de la forme $4\nu + 3$, mais c'est la même chose pour les nombres premiers de la forme $4\nu + 1$, comme nous l'avons remarqué dans l'article précédent.

Du reste, je me réserve de revenir, dans une autre occasion, au problème que nous venons d'étudier ici.

XXVI. Résolution de l'équation $x^4 - 2(2\nu + 1)^{2q+1}y^2 = 1$.

Il est très intéressant, ce me semble, qu'il est possible de résoudre complètement l'équation indéterminée

$$(1) \quad x^4 - 2ay^2 = 1, \quad a = (2\nu + 1)^{2q+1},$$

où $2\nu + 1$ est un nombre premier impair quelconque.

Remarquons tout d'abord que x est impair, il est évident que $x^2 + 1$ est de la forme $8\rho + 2$, tandis que $x^2 - 1$ est de la forme 8σ ; de plus, aucun de ces deux nombres ne peut être un carré.

Cela posé, il est évident que l'équation (1) est équivalente au système

$$(2) \quad x^2 + 1 = 2r^2, \quad x^2 - 1 = 4as^2, \quad y = 2rs,$$

où r est par conséquent impair, s pair.

Or, la première des équations (2) donnera

$$(3) \quad x = A_{2n+1}(2), \quad r = B_{2n+1}(2),$$

tandis qu'il résulte, en vertu de la deuxième,

$$(4) \quad x \mp 1 = 2a\alpha^2, \quad x \mp 1 = 2\beta^2, \quad s = \alpha\beta,$$

donc on aura

$$(4 \text{ bis}) \quad x = 2\beta^2 \pm 1, \quad \beta^2 - a\alpha^2 = \mp 1,$$

d'où, en vertu des théorèmes I et II de l'article XX,

$$x = 1, \quad x = 7.$$

On voit que la première de ces valeurs est inadmissible, tandis que la seconde donnera $\beta = 2$, de sorte qu'il résulte, en vertu de la première des équations (4),

$$a\alpha^2 = 3, \quad a = 3, \quad \alpha = 1,$$

ce qui donnera

$$s = 2, \quad r = 5, \quad y = 20,$$

et nous avons donc démontré le théorème curieux:

I. Soit $2\nu + 1$ un nombre premier, l'équation indéterminée

$$(5) \quad x^4 - 2ay^2 = 1, \quad a = (2\nu + 1)^{2q+1}, \quad q \geq 0,$$

n'est jamais résoluble en positifs entiers, à moins que

$$(5 \text{ bis}) \quad \varrho = 0, \nu = 1, 2\nu + 1 = 3;$$

dans ce cas on aura la seule solution possible

$$(6) \quad x = 7, y = 20.$$

On voit que ce théorème représente une généralisation très étendue du théorème XII de l'article XXII; du reste, il conduira immédiatement à ces deux autres théorèmes:

II. Soit $2\nu + 1$ un nombre premier, une équation de la forme

$$(7) \quad B_{2n}(2a) = p^2, \quad a = (2\nu + 1)^{2\varrho+1}$$

n'est jamais possible.

En effet, dans l'équation de FERMAT

$$(8) \quad x^2 - 2ay^2 = \pm 1,$$

dont il s'agit ici, x est toujours un nombre impair; c'est-à-dire que l'équation

$$2A_n B_n = p^2,$$

équivalente à (7), donnera

$$A_n = \alpha^2, \quad B_n = 2\beta^2, \quad p = \alpha\beta,$$

de sorte que nous aurons

$$(9) \quad \alpha^4 - 2a(2\beta^2)^2 = \pm 1.$$

Or, $\alpha^4 + 1$ étant de la forme $8\sigma + 2$, l'équation (9) est de la forme (5), de sorte qu'il résulte, en vertu du théorème I,

$$a = 3, \quad \alpha = 7, \quad 2\beta^2 = 20,$$

ce qui est impossible.

III. Soit, dans (8), ν un nombre impair, une équation de la forme

$$(10) \quad B_{2n}(2a) = 2p^2, \quad a = (4\nu + 3)^{2q+1}$$

n'est jamais possible.

On aura, dans ce cas, en vertu de (10),

$$A_n = \alpha^2, \quad B_n = \beta^2, \quad p = \alpha\beta,$$

ce qui donnera

$$\alpha^4 - 2a\beta^4 = 1,$$

équation qui est, en vertu du théorème I, impossible.

CHAPITRE VII

D'autres bases spéciales.

XXVII. L'équation d'Archimède.

Il est évident que le nombre $3 = 1^2 + 2$ est la plus simple des bases étudiées dans l'article XIV. Posons

$$\begin{aligned} A_n &= \Phi_{2n}(1), & B_n &= \Psi_{2n}(1) \\ a_n &= \Phi_{2n+1}(1), & b_n &= \Psi_{2n+1}(1), \end{aligned}$$

les solutions complètes des deux équations indéterminées

$$(1) \quad x^2 - 3y^2 = 1$$

$$(2) \quad 3v^2 = u^2 + 2$$

deviennent

$$(1 \text{ bis}) \quad x = A_n, \quad y = B_n$$

$$(2 \text{ bis}) \quad u = a_n, \quad v = b_n.$$

Appliquons maintenant la fraction continue

$$\sqrt{3} = [1, (1, 2)],$$

les A_n et les B_n sont les numérateurs, respectivement les dénominateurs des réduites aux indices impairs, en commençant par l'indice 0, savoir

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \dots,$$

tandis que les a_n et les b_n sont les numérateurs, respectivement les dénominateurs des réduites aux indices pairs, savoir

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}, \frac{265}{153}, \dots$$

Il semble que déjà ARCHIMÈDE¹ a connu une méthode pour la détermination successive des solutions de (1); c'est pourquoi nous rattachons à l'équation susdite le nom du plus grand géomètre de l'Antiquité.

Introduisons maintenant, dans les formules de l'article XIV, la valeur $\alpha = 1$, nous aurons une suite de relations entre les nombres A_n et B_n , a_n et b_n . Or, nous nous bornerons à indiquer ici les plus intéressantes de ces formules nombreuses, savoir

$$(3) \quad A_{2n} = 6B_n^2 + 1, \quad A_{2n+1} = a_{2n+1}^2 + 1$$

$$(4) \quad B_{2n} = 2A_n B_n, \quad B_{2n+1} = a_{n+1} b_{n+1}$$

$$(5) \quad 2B_n^2 + 1 = b_n b_{n+1}, \quad b_n^2 - 1 = 2B_n B_{n-1}$$

$$(6) \quad 2B_{2n} = b_{n+1}^2 - b_n^2, \quad B_{2n+1} = B_{n+1}^2 - B_n^2$$

$$(7) \quad b_{2n+1} = b_{n+1}^2 + 2B_n^2.$$

La formule (7) est bien curieuse, parce que b_{2n+1} est diviseur des deux nombres

$$2B_{2n}^2 + 1, \quad a_{2n+1}^2 + 2$$

qui sont de la forme $x^2 + 2y^2$, mais un des carrés est réduit à un.

Remarquons encore que la première des formules (5) donnera, en vertu de (1) et (3),

$$(8) \quad 2A_n^2 + 1 = 3b_n b_{n+1},$$

formule qui nous permet de démontrer la proposition:

I. L'équation indéterminée

$$(9) \quad 3x^2 + 2y^2 = 6xy - 1$$

¹ Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 14 (1882), p. 133.

admet une infinité de solutions en positifs entiers, savoir

$$(9 \text{ bis}) \quad y = A_n, \quad x = \begin{cases} b_n \\ b_{n+1}. \end{cases}$$

On aura, en effet,

$$x = y \pm \sqrt{\frac{y^2 - 1}{3}},$$

savoir

$$y = A_n, \quad x = A_n \pm B_n = \begin{cases} b_{n+1} \\ b_n. \end{cases}$$

Introduisons ensuite, dans (9), les valeurs susdites, puis soustrayons les deux équations ainsi obtenues, il résulte

$$3b_n(2A_n - b_n) = 2A_n^2 + 1 = 3b_{n+1}(2A_n - b_{n+1}),$$

et nous aurons donc

$$(10) \quad 2A_n = b_n + b_{n+1}.$$

Remarquons encore que les quatre nombres A_n et B_n , α_n et b_n se déterminent tous à l'aide de la même formule récursive, savoir

$$(11) \quad \alpha_n = 4\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}$$

et que les formules récursives de LAGRANGE

$$(12) \quad \begin{cases} A_n = 2A_{n-1} + 3B_{n-1} \\ B_n = 2B_{n-1} + A_{n-1} \end{cases}$$

donnent

$$(12 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 2B_n - A_n = B_{n-1} \\ 2A_n - 3B_n = A_{n-1} \end{cases}$$

de sorte que nous aurons toujours, pour $n > 1$,

$$(13) \quad 2B_n > A_n > \frac{3}{2}B_n.$$

Quant à la base 3, le nombre premier 3 est du rang 3, tandis que 7 est du rang 4, de sorte que les nombres A_{4n+2} et B_{4n} représentent l'ensemble des nombres A_m et B_m qui

sont divisibles par 7. Mais, y a-t-il d'autres solutions de l'équation

$$(14) \quad A_{4n+2} = 7p^2$$

que $A_2 = 7$? Problème qui est d'un certain intérêt, nous le verrons dans ce qui suit.

Étudions maintenant les nombres A_n , la proposition I de l'article XXIV donnera immédiatement cette autre:

II. Aucun des nombres A_n ne peut être un carré; car l'équation indéterminée

$$(15) \quad x^4 - 3y^2 = 1$$

n'est pas résoluble en positifs entiers.

De plus, nous avons à démontrer le théorème:

III. Le nombre $A_1 = 2$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(16) \quad A_n = 2p^2;$$

c'est-à-dire que l'équation indéterminée

$$(27) \quad 4x^4 - 3y^2 = 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$x = y = 1.$$

Remarquons tout d'abord que y est impair, de sorte que $3y^2 + 1$ est un nombre de la forme $8\sigma + 4$, il est évident que x est aussi un nombre impair, de sorte que $2x^2 + 1$ est de la forme $8\sigma + 3$, tandis que $2x^2 - 1$ est de la forme $8\sigma + 1$.

Cela posé, il résulte, en vertu de (17),

$$(18) \quad 2x^2 + 1 = 3u^2, \quad 2x^2 - 1 = v^2, \quad y = uv,$$

car $2x^2 + 1$ et $2x^2 - 1$ sont premiers entre eux, et l'on aura, en vertu de (18),

$$(18 \text{ bis}) \quad 4x^2 = 3u^2 + v^2, \quad 2 = 3u^2 - v^2,$$

ce qui donnera

$$(19) \quad 2x \pm v = 3p^2, \quad 2x \mp v = q^2, \quad u = pq,$$

parce que $2x$ et v sont, en vertu de la dernière des équations (18), premiers entre eux.

Introduisons ensuite, dans la seconde des formules (18 bis), les valeurs

$$u = pq, \quad v = \frac{3p^2 - q^2}{2},$$

tirées de (19), il résulte

$$2 = 3p^2q^2 - \left(\frac{3p^2 - q^2}{2}\right)^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$8 = 12p^2q^2 - (3p^2 - q^2)^2 = 18p^2q^2 - 9p^4 - q^4,$$

savoir

$$8 = 8q^4 - 9(p^2 - q^2)^2,$$

de sorte que nous aurons finalement

$$q^4 - 2\left(\frac{3}{4}(p^2 - q^2)\right)^2 = 1,$$

équation qui n'admet que la seule solution en nombres entiers $p = q = 1$, ce qui donnera $u = v = x = y = 1$.

On voit, que les deux premières des formules (18) donnent, comme corollaire, la proposition:

IV. L'équation

$$(20) \quad a_n = A_{2\nu+1}(2)$$

n'admet qu'une seule solution, savoir

$$(20 \text{ bis}) \quad n = 1, \quad \nu = 0, \quad a_1 = A_1(2) = 1.$$

Quant aux nombres B_m , il est facile de démontrer des théorèmes analogues aux précédents, savoir:

V. Le nombre $B_2 = 4$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(21) \quad B_{2n} = p^2;$$

c'est-à-dire que l'équation indéterminée

$$(21 \text{ bis}) \quad x^2 - 48y^4 = 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$x = 7, \quad y = 1.$$

En effet, il résulte, en vertu de (21),

$$2A_n B_n = p^2.$$

Or, A_n n'étant jamais un carré, $2A_n$ aura nécessairement cette propriété, ce qui n'est possible que pour $n = 1$, savoir $B_2 = 4$.

Mais j'ignore, si l'équation

$$(22) \quad B_{2n+1} = p^2,$$

supplémentaire à (21), admet d'autres solutions que $B_1 = 1$.

VI. Aucun des nombres B_n ne peut être le double d'un carré, car l'équation indéterminée

$$(23) \quad x^2 - 12y^4 = 1$$

n'est pas résoluble en positifs entiers.

Remarquons que les B_{2n+1} sont tous impairs, il nous reste seulement à étudier l'équation

$$B_{2n} = 2A_n B_n = 2p^2,$$

ce qui exige que A_n et B_n soient tous deux des carrés, ce qui est impossible.

Quant aux nombres B_n , nous avons encore à démontrer ici un théorème qui nous sera utile dans l'article qui suit, savoir:

VII. Le nombre $B_1 = 1$ représente la seule solution de l'équation

$$(24) \quad B_{2n+1} = 2p^2 - 1.$$

En effet, soit, dans l'équation

$$x^2 - 3y^2 = 1,$$

y un nombre impair, x est pair et se présente sous la forme $x = 6q \pm 2$, ce qui donnera, en vertu de (24),

$$(4q \pm 1)^2 = (2p^2 - 1)^2 + 4q^2,$$

de sorte que nous aurons

$$4q \pm 1 = \alpha^2 + \beta^2, \quad 2p^2 - 1 = \alpha^2 - \beta^2, \quad q = \alpha\beta,$$

où α et β sont premiers entre eux et de parité différente.

Cela posé, la première et la dernière de ces équations donnent

$$(\alpha - 2\beta)^2 - 3\beta^2 = \pm 1,$$

dè sorte qu'il faut supprimer, dans l'expression $x = 6q \pm 2$, le signe inférieur, donc on aura

$$\beta = B_\nu, \quad \alpha - 2\beta = \pm A_\nu, \quad \alpha = 2B_\nu \pm A_\nu,$$

ce qui donnera

$$2p^2 - 1 = 3B_\nu^2 + A_\nu^2 \pm 4A_\nu B_\nu = 2A_\nu^2 \pm 4A_\nu B_\nu - 1,$$

savoir

$$(25) \quad p^2 = A_\nu(A_\nu + 2B_\nu),$$

car $A_\nu - 2B_\nu$ est, en vertu des inégalités (13), un nombre négatif.

Soit maintenant, dans (25), ν un nombre pair, A_ν est de la forme $4\sigma + 2$, parce que le nombre 2 est du rang 2; c'est-à-dire que 2 est le plus grand commun diviseur de A_ν et de $A_\nu + 2B_\nu$, de sorte que nous aurons

$$A_\nu = 2r^2, \quad A_\nu + 2B_\nu = 2s^2, \quad p = 2rs.$$

Or, la première de ces équations n'est, en vertu du théorème III, possible que pour $\nu = r = 1$, ce qui donnera

$$A_\nu + 2B_\nu = 4 = 2s^2,$$

supposition qui n'est pas admissible.

Soit donc ν un nombre pair, A_ν est impair, et les deux facteurs qui figurent au second membre de (25) sont premiers entre eux, de sorte que nous aurons

$$A_\nu = r^2, \quad A_\nu + 2B_\nu = s^2, \quad p = rs,$$

ce qui n'est possible pour aucune valeur positive de ν , de sorte qu'il ne nous reste que la solution triviale $\nu = 0$, savoir $r = s = p = 1$.

XXVIII. Applications diverses.

Le dernier résultat que nous venons d'obtenir, dans l'article précédent, nous permet de démontrer la proposition curieuse:

I. L'équation indéterminée

$$(1) \quad x^3 + 1 = y^2$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(2) \quad x = 2, \quad y = 3.$$

En effet, remarquons tout d'abord que les deux nombres $x + 1$ et $x^2 - x + 1$ sont ou premiers entre eux ou ils ont le plus grand commun diviseur 3. Or $x^2 - x + 1$ n'étant jamais un carré, il résulte donc, en vertu de (1),

$$(3) \quad x + 1 = 3p^2, \quad x^2 - x + 1 = 3q^2, \quad y = 3pq,$$

où p et q sont premiers entre eux, et la deuxième de ces formules se présente sous la forme

$$(2x - 1)^2 + 3 = 3(2q)^2,$$

ce qui donnera, en vertu de la première des formules susdites,

$$(4) \quad (2q)^2 - 3(2p^2 - 1)^2 = 1.$$

Cela posé, il résulte, en vertu du théorème VII de l'article précédent, que l'équation (4) n'est possible que pour $p = q = 1$, ce qui donnera précisément la solution (2).

Quant au théorème que nous venons de démontrer, remarquons, en passant, que CATALAN¹ a énoncé, sans démonstration, le théorème général:

Deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes.*

C'est-à-dire que l'équation indéterminée

$$(5) \quad x^m = y^n + 1$$

n'est résoluble en positifs entiers que pour $x = 3$, $y = 2$, $m = 2$, $n = 3$, ce qui est précisément notre équation (1).

LE BESGUE² a démontré l'impossibilité de l'équation (5) pour $n = 2$, mais il dit que le théorème général est difficile à démontrer. Plus tard, GERONO³ a démontré l'impossibilité de l'équation (5), dans le cas où y est un nombre premier.

Quant à notre théorème I, je ne me rappelle pas l'avoir vu complètement démontré, dans la littérature qui mentionne, plus ou moins légèrement, l'équation (1), littérature de laquelle nous citons, outre un auteur anonyme⁴, MM. GERONO⁵, MEYL⁶ et MORET-BLANC⁷.

Écrivons maintenant sous la forme

$$x^3 = (y + 1)(y - 1)$$

l'équation (1), puis remarquons que l'hypothèse

¹ Nouvelles Annales t. 1, p. 520; 1842.

² Ibid. t. 9, p. 178—181; 1850.

³ Ibid. (2) t. 9, p. 469—471; 1870.

⁴ Ibid. (2) t. 9, p. 204—206; 1870.

⁵ Ibid. (2) t. 9, p. 452; 1870.

⁶ Ibid. (2) t. 15, p. 545; 1876.

⁷ Ibid. (2) t. 15, p. 44—46; 1876.

$$y + 1 = p^3, \quad y - 1 = q^3$$

est inadmissible, nous aurons nécessairement

$$y \pm 1 = 2p^3, \quad y \mp 1 = 4q^3, \quad x = 2pq,$$

ce qui donnera

$$(6) \quad p^3 - 2q^3 = \pm 1.$$

Or, cette équation indéterminée étant équivalente à l'équation (1), elle n'admet que la seule solution en positifs entiers $x = y = 1$, qui correspond au signe inférieur au second membre.

Il est très singulier, ce me semble, qu'aucun des auteurs susdits n'ait remarqué que la résolution de l'équation (6), communiquée par LEGENDRE¹, entraîne celle de l'équation (1).

Dans le problème I de l'article XXII, nous avons déterminé les valeurs de n , pour lesquelles la somme des n premiers nombres devient un carré. Or, la proposition I nous permet de résoudre un problème analogue concernant la somme des n premiers nombres carrés, c'est-à-dire de démontrer la proposition :

II. L'équation indéterminée

$$(7) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 = y^3,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(7 \text{ bis}) \quad x(x + 1)(2x + 1) = 6y^3,$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(8) \quad x = y = 1.$$

A cet effet, remarquons que les deux nombres

$$x(x + 1), \quad 2x + 1$$

¹ Théorie des Nombres, t. II, p. 13; 3^e édition; Paris 1830.

sont premiers entre eux, puis remarquons que le premier de ces nombres ne peut pas être une puissance, plus élevée que la première, d'un positif entier, il est évident que l'équation (7) conduira à ces deux systèmes d'équations indéterminées simultanées

$$(9) \quad x(x+1) = 2t^3, \quad 2x+1 = 3u^3, \quad y = tu$$

$$(10) \quad x(x+1) = 6t^3, \quad 2x+1 = u^3, \quad y = tu.$$

Or, la première des équations (9) se présentant sous la forme

$$(2x+1)^2 = (2t)^3 + 1,$$

savoir l'équation (1), on aura $x = t = u = y = 1$, ce qui est précisément la solution (8).

Quant aux équations (10), on aura

$$(2x+1)^2 = u^6 = 24t^3 + 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(11) \quad (u^2 - 1)(u^4 + u^2 + 1) = 24t^3,$$

et il résulte donc, conformément aux remarques faites relativement aux équations (1) et (3), des expressions de la forme

$$(11 \text{ bis}) \quad u^2 - 1 = 3^\alpha (2p)^\beta, \quad u^4 + u^2 + 1 = 3^\beta q^3.$$

Cela posé, je dis que l'on aura nécessairement $\beta = 1$. En effet, les équations (11 bis) donnent immédiatement

$$3u^2 = 3^\beta q^3 - 3^{2\alpha} (2p)^6,$$

ce qui exige $\beta = 1$, parce que u n'est pas divisible par 3. Posons donc, dans (11 bis), $\beta = 1$, il résulte, en vertu de (11),

$$3^\alpha p^3 q^3 = t^3,$$

c'est-à-dire que α est divisible par 3, de sorte que la première des équations (11 bis) se présente sous la forme

$$u^2 - 1 = (6p)^\beta,$$

équation qui n'est pas résoluble en positifs entiers.

Quant aux premiers membres des formules (7), il est facile de démontrer cette autre proposition:

III. La somme des n premiers nombres carrés ne peut jamais être le double d'un carré.

Conformément aux remarques faites relativement à l'équation (7 bis), l'équation indéterminée dont il s'agit ici, savoir

$$(12) \quad x(x+1)(2x+1) = 12y^2$$

conduira à ces autres

$$x(x+1) = 12z^2, \quad 2x+1 = u^2, \quad y = zu,$$

et les deux premières de ces équations donnent l'équation d'ARCHIMÈDE

$$(13) \quad u^4 - 3(4z)^2 = 1,$$

qui n'est pas résoluble en positifs entiers.

Remarquons, en passant, que cette autre équation

$$(14) \quad x(x+1)(2x+1) = 18y^2$$

a la même propriété que (12), celle de ne pas être résoluble en positifs entiers, parce qu'elle entraîne nécessairement que $2x+1$ soit un carré, de sorte que nous aurons une équation de la forme

$$p^4 - (2q)^2 = 1.$$

équation qui n'est pas résoluble en positifs entiers.

Cela posé, il est curieux, ce me semble, que l'équation indéterminée

$$(15) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + x^4 = 2y^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(15 \text{ bis}) \quad x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1) = 60y^2$$

soit résoluble en positifs entiers.

En effet, remarquons que les deux nombres

$$x(x+1)(2x+1), \quad 3x(x+1)-1$$

sont premiers entre eux, à moins que

$$2x+1, \quad 3x(x+1)-1$$

n'aient le plus grand commun diviseur 7, puis remarquons qu'une équation de la forme

$$3x(x+1)-1 = ap^2$$

n'est possible que pour $a = 3\mu - 1$, l'équation (15 bis) conduira à celles-ci

$$(16) \quad \begin{cases} x(x+1) = 12r^2, & 2x+1 = 7q^2 \\ 3x(x+1)-1 = 35p^2, & y = 7pqr. \end{cases}$$

Or, les deux premières de ces équations donnent

$$(17) \quad 49q^4 - 48r^2 = 1,$$

de sorte que le problème qui nous occupe ici se rattache à l'équation

$$A_{4n+1}(3) = 7q^2,$$

savoir l'équation (14) de l'article précédent.

Il est évident que l'équation (17) a la solution $q = r = 1$, ce qui donnera $x = 3$, $p = 7$, $y = 49$, et l'on aura donc

$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 2 \cdot 7^2,$$

mais y a-t-il d'autres solutions de l'équation (15)?

XXIX. De la base $a = 6$.

Nous avons encore à étudier la base $6 = 2^2 + 2$; posons

$$\begin{aligned} A_n &= \Phi_{2n}(2), & B_n &= \psi_{2n}(2) \\ a_n &= \frac{1}{2}\Phi_{2n+1}(2), & b_n &= \psi_{2n+1}(2), \end{aligned}$$

les valeurs

$$x = A_n, \quad y = B_n$$

$$u = a_n, \quad v = b_n$$

représentent l'ensemble des positifs entiers qui satisfont aux équations

$$(1) \quad x^2 - 6y^2 = 1$$

$$(2) \quad 3v^2 = 2u^2 + 1.$$

De plus, il est évident que les A_n et les B_n sont les numérateurs respectivement les dénominateurs des réduites aux indices impairs, en commençant par l'indice 0, de la fraction continue

$$\sqrt{6} = [2, (2, 4)],$$

savoir

$$\frac{5}{2}, \frac{49}{20}, \frac{485}{198}, \frac{4801}{1960}, \dots$$

tandis que les a_n et les b_n sont la moitié des numérateurs, respectivement les dénominateurs des autres réduites, savoir

$$\frac{1}{1}, \frac{11}{9}, \frac{109}{89}, \frac{1079}{881}, \dots$$

Introduisons, dans l'article XIV, $\alpha = 2$, nous aurons une suite de relations concernant les nombres que nous venons d'introduire ici, formules parmi lesquelles nous nous bornerons à citer celles-ci

$$(3) \quad A_{2n} = 12B_n^2 + 1, \quad A_{2n+1} = 4a_{n+1}^2 + 1$$

$$(4) \quad B_{2n} = 2A_n B_n, \quad B_{2n+1} = 2a_{n+1} b_{n+1}$$

$$(5) \quad 4B_{2n} = b_{n+1}^2 - b_n^2, \quad 2b_{2n+1} = B_{n+1}^2 - B_n^2$$

$$(6) \quad 2B_n^2 + 1 = b_n b_{n+1}, \quad b_n^2 - 1 = 2B_n B_{n-1}$$

$$(7) \quad b_{2n+1} = b_{n+1}^2 + 2B_n^2.$$

De plus, les quatre nombres A_n et B_n , a_n et b_n se déterminent par la même formule récurrente, savoir

$$(8) \quad \alpha_n = 10\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}.$$

Remarquons encore que la base 6 est de la forme $2 \cdot 3$, il résulte, en vertu du théorème I de l'article XXVI,

I. Le nombre $A_2 = 49$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(9) \quad A_n = p^2;$$

c'est-à-dire que l'équation indéterminée

$$(10) \quad x^4 - 6y^2 = 1$$

n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(11) \quad x = 7, \quad y = 20.$$

Remarquons, en passant, que l'équation (14) de l'article XX donnera la proposition curieuse:

II. L'équation indéterminée

$$(12) \quad x^4 - (x-1)y^2 = 1$$

admet, abstraction faite du cas trivial $x = 1$, précisément la même solution en positifs entiers que l'équation (10).

De plus, le théorème II de l'article XXV donnera:

III. Une équation de la forme

$$(13) \quad A_{2n+1} = 2p^2 \pm 1$$

est impossible.

Appliquons ensuite la dernière des formules (3), il résulte de même:

IV. Une équation de la forme

$$(14) \quad B_{2\nu}(2) = a_n$$

est impossible quels que soient les indices ν et n .

Quant aux nombres B_m , il est évident que B_{2n+1} , étant de la forme $4\varrho + 2$, ne peut jamais être un carré, de sorte qu'il résulte, en vertu du théorème II de l'article XXVI:

V. Le nombre B_n ne peut jamais être un carré, donc l'équation indéterminée

$$(15) \quad x^2 - 6y^4 = 1$$

n'est pas résoluble en positifs entiers.

De plus, le théorème III de l'article XXVI donnera:

VI. Le nombre B_{2n} ne peut jamais être le double d'un carré, donc l'équation indéterminée

$$(16) \quad x^2 - 96y^4 = 1$$

n'est pas résoluble en positifs entiers.

La valeur $A_2 = 49$ montre que les A_{4n+2} et les B_{4n} sont tous divisibles par 49, tandis qu'aucun autre des nombres A_m et B_m n'est divisible par 7.

Quant aux nombres A_{4n+2} , on aura:

VII. Le nombre $A_2 = 49$ représente la seule solution possible de l'équation

$$(17) \quad A_{4n+2} = 49p^2,$$

tandis qu'une équation de la forme

$$(17 \text{ bis}) \quad A_{4n+2} = 7p^2$$

est impossible.

Remarquons que le second membre de (17) est un carré, il ne nous reste, en vertu du théorème I, que l'équation (17 bis), ou, ce qui est la même chose,

$$(18) \quad 49p^4 - 24y^2 = 1.$$

Or, $7p^2 + 1$ n'étant jamais divisible par 3, et $7p^2 - 1$ étant de la forme $4\sigma + 2$, on aura, en vertu de (18),

$$7p^2 + 1 = 4u^2, \quad 7p^2 - 1 = 6t^2, \quad y = tu,$$

savoir

$$1 = 2a^2 - 3t^2,$$

ce qui est impossible, parce que le second membre est de la forme $3\sigma + 2$.

Il nous reste encore à démontrer que l'équation

$$(19) \quad B_{2n+1}(6) = 2p^2$$

se rattache à celle-ci

$$(20) \quad B_{2\nu+2}(3) = k^2.$$

En effet, introduisons, dans l'équation (1), $y = 2p^2$, il résulte ces deux systèmes d'équations indéterminées simultanées

$$(21) \quad x \pm 1 = 12r^4, \quad x \mp 1 = 2s^4, \quad p = rs$$

$$(21 \text{ bis}) \quad x \pm 1 = 6r^4, \quad x \mp 1 = 4s^4, \quad p = rs.$$

Or, le système (21) n'est pas admissible, parce qu'il donne

$$s^4 - 6r^4 = \pm 1$$

équation qui n'admet aucune solution en positifs entiers.

Quant aux équations (21 bis), elle donnent

$$3r^4 - 2s^4 = \pm 1,$$

et il faut donc supprimer la valeur -1 au second membre; c'est-à-dire qu'il existe, l'équation (19) supposée possible, un indice ν tel que

$$(22) \quad a_{\nu+1}(3) = s^2, \quad b_{\nu+1}(3) = r^2,$$

ce qui conduira précisément à une équation de la forme (20), où $k = rs = p$, de sorte que nous aurons

$$(23) \quad B_{2n+1}(6) = 2B_{2\nu+1}(3).$$

Cela posé, il est bien curieux que l'équation plus générale

$$(24) \quad B_n = pq^2,$$

où p est un nombre premier impair, conduise aussi à l'équation (20).

Remarquons tout d'abord que, B_n étant un nombre pair, q est pair aussi, et il s'agit donc de l'équation indéterminée

$$(25) \quad (x + 1)(x - 1) = 96p^2q^4,$$

ce qui donnera ces quatre systèmes d'équations indéterminées simultanées

$$(a) \quad x \pm 1 = 2p^2r^4, \quad x \mp 1 = 48s^4, \quad q = rs$$

$$(b) \quad x \pm 1 = 6p^2r^4, \quad x \mp 1 = 16s^4, \quad q = rs$$

$$(c) \quad x \pm 1 = 2r^4, \quad x \mp 1 = 48p^2s^4, \quad q = rs$$

$$(d) \quad x \pm 1 = 6r^4, \quad x \mp 1 = 16p^2s^4, \quad q = rs.$$

Or, le système (a) donnera, après la suppression de la valeur inadmissible -1 ,

$$1 = p^2r^4 - 24s^4,$$

ce qui est précisément une équation de la forme (1), et l'on aura donc

$$(26) \quad A_\nu = pr^2, \quad B_\nu = 2s^2,$$

où ν doit nécessairement être un nombre impair, ce qui est une conséquence directe du théorème VI; c'est-à-dire que la dernière des équations (26) est précisément de la forme (19).

Quant au système (b), il résulte

$$1 = 3(pr^2)^2 - 2(2s^2)^2,$$

ce qui est impossible, parce que les $a_\nu(3)$ sont tous impairs. On voit que le système (c) donnera

$$r^4 - 6(2ps^2)^2 = 1,$$

savoir, en vertu du théorème VII, $r = 7$, $ps^2 = 10$, ce qui est impossible, tandis que l'on aura, en vertu du système (d), l'équation impossible

$$1 = 3r^4 - 2(2ps^2)^2.$$

Cela posé, il nous reste seulement le système (a), savoir les équations (26), où ν est impair; de plus, il résulte, en vertu de (24) et (26),

$$B_n = 4pr^2s^2 = B_{2\nu},$$

ce qui donnera la proposition curieuse:

VIII. Une équation de la forme (24) est impossible, à moins que n ne soit de la forme $4\nu + 2$ et qu'il n'existe un indice q tel que

$$(27) \quad B_{2\nu+1}(6) = 2B_{2q+1}(3),$$

où $B_{2q+1}(3)$ est un carré.

On voit que la valeur

$$B_2(6) = 5 \cdot 2^2$$

provient de (26), pour $p = 5$, $r = s = 1$, ce qui donnera

$$B_1(6) = 2B_1(3) = 2.$$

XXX. Problème de Lucas.

ÉDOUARD LUCAS, dans un livre publié en 1873¹, a énoncé, sans démonstration, le théorème intéressant:

I. L'équation indéterminée

$$(1) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2 = y^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1 \text{ bis}) \quad x(x+1)(2x+1) = 6y^2$$

a seulement deux solutions en positifs entiers, savoir

¹ Recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Dio-
phante; Moulins 1873. Citation de LUCAS, dans les Nouvelles Annales (2)
t. 18, p. 74—77; 1879.

$$(2) \quad x = y = 1; \quad x = 24, \quad y = 70.$$

Après l'essai maladroit qu'a fait MORET BLANC¹ de démontrer le théorème susdit, LUCAS² a cherché lui-même à établir une démonstration, en étudiant les neuf systèmes possibles de la forme

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 t^2, \quad x + 1 = \alpha_2 u^2, \quad 2x + 1 = \alpha_3 v^2 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 &= 6, \quad tuv = y, \end{aligned}$$

provenus de l'équation (1 bis).

Or, sa résolution du système

$$x = 6t^2, \quad x + 1 = u^2, \quad 2x + 1 = v^2$$

est incomplète, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'article XXIV, où nous avons aussi démontré que cette insuffisance est sans influence sur le résultat final. Mais c'est une chose très grave que LUCAS se contente d'une remarque futile concernant le système

$$(3) \quad x = t^2, \quad x + 1 = 2u^2, \quad 2x + 1 = 3v^2,$$

afin d'établir que ce système n'admet qu'une seule solution en positifs entiers, savoir

$$(3 \text{ bis}) \quad x = t = u = v = 1.$$

En effet, la résolution du système (3) représente toute la difficulté du problème proposée.

GERONO³ a essayé de combler cette lacune du développement de LUCAS, mais sa démonstration est fondée sur »le remarquable théorème« démontré par M. E. DE JONQUIÈRES, et par conséquent elle est sans valeur.

¹ Nouvelles Annales (2) t. 15, p. 46—48; 1876.

² Ibid. (2) t. 16, p. 429—432; 1877.

³ Ibid. (2) t. 17, p. 381—382; 1878.

Plus tard, le P. TH. PEPIN¹ S. J. a étudié l'équation indéterminée (1), »deren Lösung ebenfalls vervollständig wird«², mais j'ignore et les résultats et la méthode de ce géomètre distingué.

Quant au problème de LUCAS, savoir les équations (1), il résulte, conformément aux remarques faites concernant l'équation (7) de l'article XXVIII, ces deux systèmes d'équations indéterminées simultanées

$$(a) \quad x(x+1) = 6y^2, \quad 2x+1 = u^2, \quad y = tu$$

$$(b) \quad x(x+1) = 2t^2, \quad 2x+1 = 3u^2, \quad y = tu.$$

Quant au système (a), on aura

$$u^4 - 24t^2 = 1,$$

savoir $u = 7$, $t = 10$, ce qui donnera $x = 24$, $y = 70$, savoir la seconde des solutions (2).

Étudions ensuite le système (b), il résulte

$$(4) \quad 9u^4 - 8t^2 = 1,$$

ce qui donnera la proposition curieuse:

II. Le postulat de LUCAS exige que l'équation

$$(5) \quad A_{4n+2}(2) = 3p^2$$

n'ait que la seule solution

$$(5 \text{ bis}) \quad A_2(2) = 3,$$

ce qui est certainement le cas, pourvu que le postulat de M. E. DE JONQUIÈRES soit vrai.

¹ Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, t. 35, p. 281—302; 1879.

² Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. (11), 1879, p. 135. Le Jahrbuch, t. 10 (1878), p. 145 indique faussement que LUCAS ait démontré le résultat (3 bis).

En effet, supposons que l'équation (4) n'ait que la seule solution $u = t = 1$, nous aurons $x = y = 1$, savoir la première des solutions (2).

Remarquons, en passant, que la démonstration exacte du postulat de LUCAS n'entraîne pas le postulat de M. E. DE JONQUIÈRES, comme le montre clairement la démonstration du théorème IV de l'article XIX.

Or, il est très curieux, ce me semble, que les résultats indiqués, supposés vrais, permettent de résoudre complètement cette autre équation indéterminée

$$(6) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + x^4 = y^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(6 \text{ bis}) \quad x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1) = 30y^2.$$

En effet, l'équation (6 bis) donne, en vertu des remarques faites relativement à l'équation (15 bis) de l'article XXVIII, ces trois systèmes d'équations indéterminées

$$(a) \quad x(x+1)(2x+1) = 6z^2, \quad 3x^2+3x-1 = 5u^2, \quad y = zuv$$

$$(b) \quad x(x+1) = 6t^2, \quad 2x+1 = 7u^2, \quad 3x^2+3x-1 = 35v^2, \quad y = 7zuv$$

$$(c) \quad x(x+1) = 2t^2, \quad 2x+1 = 21u^2, \quad 3x^2+3x-1 = 35v^2, \quad y = 7zuv.$$

Quant aux équations (a), on aura $x = z = u = y = 1$, tandis que les valeurs $x = 24$, $y = 70$ sont inadmissibles, parce que $3x(x+1)$ est multiple de 5.

Étudions maintenant le système (b), les deux premières équations donnent

$$(2x+1)^2 - 24t^2 = 1, \quad 2x+1 = 7u^2,$$

et il résulte du théorème VII de l'article précédent que ces équations ne sont pas résolubles en positifs entiers.

Enfin, les équations (c) donnent

$$(2x+1)^2 - 2(2t)^2 = 1, \quad 2x+1 = 21u^2,$$

ce qui est impossible, parce que $A_{2^{\nu}}(2)$ ne peut pas être multiple de 7.

Cela posé, nous venons de démontrer la proposition curieuse :

III. Supposons vrai le postulat de LUCAS, l'équation indéterminée (6) n'admet que la solution triviale $x = y = 1$.

CHAPITRE VIII

Des bases de première espèce.

XXXI. La base a et les nombres $\omega_{\mu-1}$ et $p_{\mu-1}$.

Soit a une base quelconque de première espèce, l'équation

$$(1) \quad A_{2n+1}^2 + 1 = aB_{2n+1}^2$$

montre clairement que a et B_{2n+1} sont tous deux une somme de deux carrés, savoir

$$(2) \quad a = p^2 + q^2$$

$$(3) \quad B_{2n+1} = x^2 + y^2$$

Or, le premier membre de (1) étant ou impair ou de la forme $4\sigma + 2$, il est évident que B_{2n+1} est toujours impair, tandis que a est ou impair ou de la forme $4\sigma + 2$; c'est-à-dire que, dans (2), au moins un des nombres p et q est impair.

Appliquons ensuite la formule générale (10) de l'article XV, il résulte, en vertu de (1), (2), (3),

$$(4) \quad A_{2n+1}^2 + 1 = [p(x^2 - y^2) \pm 2qxy]^2 + [q(x^2 - y^2) \mp 2pxy]^2,$$

donc il est possible de choisir, dans (2), les nombres p et q , de sorte qu'il soit possible de déterminer x et y tels qu'un des deux carrés qui figurent au second membre de (4) ait la valeur 1.

A cet égard, nous avons à revenir aux nombres ω_r et p_r , définis dans les articles III et VI par les formules

$$y_r^2 - a z_r^2 = (-1)^{r-1} \omega_r$$

$$y_r y_{r+1} - a z_r z_{r+1} = (-1)^{r+1} p_r,$$

il résulte, en combinant la dernière de ces formules et celle-ci

$$y_r z_{r+1} - z_r y_{r+1} = (-1)^{r+1},$$

puis cherchant y_r et z_r ,

$$(5) \quad \begin{cases} \omega_{r+1} y_r = a z_{r+1} - p_r y_{r+1} \\ \omega_{r+1} z_r = y_{r+1} - p_r z_{r+1}, \end{cases}$$

tandis que nous aurons de même

$$(6) \quad \begin{cases} \omega_r y_{r+1} = a z_r + p_r y_r \\ \omega_r z_{r+1} = p_r z_r + y_r, \end{cases}$$

formules qui sont déjà indiquées dans l'article VI.

Appliquons ensuite la formule (12) de l'article susdit, savoir

$$\omega_r \omega_{r+1} = a - p_r^2,$$

il est facile de démontrer le théorème :

I. Soit a une base de première espèce ayant le nombre caractéristique $2\mu + 1$, on aura toujours

$$(7) \quad a = \omega_{\mu-1}^2 + p_{\mu-1}^2.$$

En effet, la formule fondamentale

$$\omega_r = \omega_{2\mu-r-1}, \quad 0 \leq r \leq 2\mu - 1,$$

donnera

$$(8) \quad \omega_\mu = \omega_{\mu-1},$$

et la formule (7) est évidente.

Cela posé, remarquons que les formules (11) de l'article III donnent,

$$(9) \quad B_1 = z_\mu^2 + z_{\mu-1}^2,$$

je dis que nous aurons, conformément à la formule (4), pour $n = 0$,

$$(10) \quad \omega_{\mu-1} (z_\mu^2 - z_{\mu-1}^2) - 2p_{\mu-1} z_{\mu-1} z_\mu = (-1)^\mu$$

$$(11) \quad A_1 = p_{\mu-1} (z_\mu^2 - z_{\mu-1}^2) + 2\omega_{\mu-1} z_{\mu-1} z_\mu.$$

Démontrons tout d'abord la formule (10), qui entraîne nécessairement (11); nous aurons

$$\begin{aligned} \omega_{\mu-1} z_\mu^2 &= z_\mu (p_{\mu-1} z_{\mu-1} + y_{\mu-1}) \\ \omega_{\mu-1} z_{\mu-1}^2 &= \omega_\mu z_{\mu-1}^2 = z_{\mu-1} (y_\mu - p_{\mu-1} z_\mu), \end{aligned}$$

ce qui donnera immédiatement la formule (10), donc nous aurons la proposition:

II. Le nombre $\omega_{\mu-1}$ est toujours impair.

Quant à la formule (11), on aura

$$2\omega_{\mu-1} z_{\mu-1} z_\mu = 2\omega_\mu z_{\mu-1} z_\mu = 2z_\mu (y_\mu - p_{\mu-1} z_\mu),$$

ce qui donnera, en vertu de (9)

$$(12) \quad A_1 = 2y_\mu z_\mu - p_{\mu-1} B_1,$$

de sorte que la formule (11) de l'article III

$$(13) \quad A_1 = y_\mu z_\mu + y_{\mu-1} z_{\mu-1}$$

donnera

$$(14) \quad p_{\mu-1} B_1 = y_\mu z_\mu - y_{\mu-1} z_{\mu-1}.$$

Cela posé, on aura immédiatement, en vertu de (13) et (14),

$$A_1^2 - p_{\mu-1}^2 B_1^2 = 4y_\mu z_\mu y_{\mu-1} z_{\mu-1},$$

et l'équation

$$A_1^2 - (p_{\mu-1}^2 + \omega_{\mu-1}^2) B_1^2 = -1$$

donnera donc la relation curieuse

$$(15) \quad \omega_{\mu-1}^2 B_1^2 = 4y_\mu z_\mu y_{\mu-1} z_{\mu-1} + 1,$$

de sorte que le nombre qui figure au second membre est toujours un carré.

Revenons maintenant à la formule (4), puis supposons que p soit impair, ce qui est permis, nous savons que l'équation

$$(16) \quad p(x^2 - y^2) \pm 2qxy = \pm 1$$

est, pour $p = \omega_{\mu-1}$, résoluble en positifs entiers, ce qui est une conséquence immédiate de l'équation (10); mais y a-t-il d'autres représentations de la forme (2), pour lesquelles l'équation (16) soit résoluble en positifs entiers?

Je n'ai pas réussi à donner une réponse définitive à cette question, mais supposons résoluble en positifs entiers l'équation (16), nous aurons

$$x = \frac{1}{p} (\mp qy \pm \sqrt{ay^2 \pm p})$$

$$y = \frac{1}{p} (\pm qx \pm \sqrt{ax^2 \mp p});$$

c'est-à-dire que les équations indéterminées

$$(17) \quad u^2 - av^2 = p$$

$$(18) \quad u_1^2 - av_1^2 = -p$$

sont toutes deux résolubles en positifs entiers, et il est possible de déterminer de telles solutions que

$$(19) \quad B_1 = v^2 + v_1^2$$

$$(20) \quad aB_1 = u^2 + u_1^2.$$

De plus, on aura, dans ce cas

$$pv_1 = \mp qv \pm u$$

$$pv = \pm qv_1 \pm u_1,$$

ce qui donnera, en vertu de (2), (19), (20),

$$(21) \quad qB_1 = \pm (uv \pm u_1 v_1).$$

Quant aux équations (17) et (18), il est facile de démontrer la proposition:

III. Supposons qu'une des équations (17) et (18) ait une seule solution en positifs entiers, les équations ont toutes deux une infinité de telles solutions.

En effet, multiplions une des équations susdites, par exemple la première, par celle-ci

$$A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^n,$$

où n est un positif entier quelconque, il résulte

$$(uA_n \pm avB_n)^2 - a(vA_n \pm uB_n)^2 = (-1)^n p.$$

Soit particulièrement a un nombre premier de la forme $4\nu + 1$, il n'existe d'autres représentations que (7), donc il faut admettre, dans (17) et (18)

$$(22) \quad p = \omega_{\mu-1},$$

et l'on aura par conséquent

$$(23) \quad \begin{cases} u = y_{2n\mu+\mu-1}, & v = z_{2n\mu+\mu-1} \\ u_1 = y_{2n\mu+\mu}, & v_1 = z_{2n\mu+\mu}. \end{cases}$$

XXXII. Des nombres B_{2nr+r} .

Soit a une base de première espèce, et soit r un indice impair, B_r et B_{2nr+r} sont tous deux la somme de deux carrés, donc il existe une représentation de la forme

$$(1) \quad B_{2nr+r} = B_r(\alpha^2 + \beta^2),$$

et il est très facile de déterminer un système des valeurs de α et β .

En effet, on aura, en vertu de la formule logarithmique générale, savoir la formule (19) de l'article VII,

$$2a B_r B_{2nr+r} = A_{2nr+2r} + A_{2nr},$$

de sorte que la formule

$$(2) \quad A_{2m} = 2a B_m^2 + (-1)^m$$

donnera immédiatement

$$B_r B_{2nr+r} = B_{nr+r}^2 + B_{nr}^2,$$

et il résulte donc

$$(3) \quad B_{2nr+r} = B_r \left(\left(\frac{B_{nr+r}}{B_r} \right)^2 + \left(\frac{B_{nr}}{B_r} \right)^2 \right).$$

Cela posé, remarquons que le nombre

$$(4) \quad b = a B_r^2 = A_r^2 + 1$$

est toujours une base de première espèce, il est évident que la formule (1) se rattache à l'équation de FERMAT

$$x^2 - (A_r^2 + 1) y^2 = \pm 1,$$

dont les solutions deviennent

$$(5) \quad x = \varphi_m(A_r), \quad y = \psi_m(A_r),$$

et nous aurons donc, en vertu de (4),

$$(6) \quad \varphi_n(A_r) = A_{nr}, \quad \psi_n(A_r) = \frac{1}{B_r} B_{nr},$$

de sorte que la formule (3) n'est autre chose que celle-ci

$$(7) \quad B_{2nr+r} = B_r (\psi_{n+1}^2(A_r) + \psi_n^2(A_r)).$$

Or, cette dernière formule montre clairement que l'hypothèse spéciale

$$(8) \quad a = \alpha^2 + 1, \quad aB_r^2 = \beta^2 + 1$$

conduira à des résultats intéressants.

En effet, soit $r = 2\mu + 1$, on aura

$$(9) \quad \psi_r(\alpha) = \psi_\mu^2(\alpha) + \psi_{\mu+1}^2(\alpha),$$

de sorte que la formule (7) se présente sous la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{2nr+r}(\alpha) &= (\psi_{\mu+1}(\alpha) \psi_{n+1}(\beta) \pm \psi_\mu(\alpha) \psi_n(\beta))^2 + \\ &+ (\psi_\mu(\alpha) \psi_{n+1}(\beta) \mp \psi_n(\beta) \psi_{\mu+1}(\alpha))^2. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, je dis que nous aurons

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{\mu+1}(\alpha) \psi_{n+1}(\beta) - (-1)^\mu \psi_\mu(\alpha) \psi_n(\beta) &= \psi_{nr+\mu+1}(\alpha) \\ \psi_\mu(\alpha) \psi_{n+1}(\beta) + (-1)^\mu \psi_{\mu+1}(\alpha) \psi_n(\beta) &= \psi_{nr+\mu}(\alpha), \end{aligned} \right.$$

de sorte que la formule (10) donnera à la fois l'identité obtenue de (9), en y remplaçant r par $2nr + r$, et cette autre formule

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{2nr+r}(\alpha) &= (\psi_{\mu+1}(\alpha) \psi_{n+1}(\beta) + (-1)^\mu \psi_\mu(\alpha) \psi_n(\beta))^2 + \\ &+ (\psi_\mu(\alpha) \psi_{n+1}(\beta) - (-1)^\mu \psi_{\mu+1}(\alpha) \psi_n(\beta))^2. \end{aligned} \right.$$

Quant à (11), il suffit évidemment de démontrer une seule de ces deux formules, par exemple la première. A cet effet, il s'agit, en vertu de (6), de démontrer l'identité

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} 2(\alpha^2 + 1) \psi_{\mu+1}(\alpha) \psi_{nr+r}(\alpha) - (-1)^\mu 2(\alpha^2 + 1) \psi_\mu(\alpha) \psi_{nr}(\alpha) &= \\ &= 2(\alpha^2 + 1) \psi_r(\alpha) \psi_{nr+\mu+1}(\alpha). \end{aligned} \right.$$

Or, la formule logarithmique générale, savoir la formule (19) de l'article VII, donnera

$$\begin{aligned} 2(\alpha^2 + 1) \psi_{\mu+1} \psi_{nr+r}(\alpha) &= \varphi_{nr+r+\mu+1}(\alpha) + (-1)^\mu \varphi_{nr+\mu}(\alpha) \\ (-1)^\mu 2(\alpha^2 + 1) \psi_\mu(\alpha) \psi_{nr}(\alpha) &= (-1)^\mu \varphi_{nr+\mu}(\alpha) - \varphi_{nr-\mu}(\alpha) \end{aligned}$$

de sorte que le premier membre de la formule (13) aura la valeur

$$\varphi_{nr+r+\mu+1}(\alpha) + \varphi_{nr-\mu}(\alpha) = 2(\alpha^2 + 1) \psi_r(\alpha) \psi_{nr+\mu+1}(\alpha),$$

ce qui donnera précisément (13) et par conséquent aussi la première des formules (11).

Soit par exemple

$$\alpha = 1, \quad r = 3, \quad B_3 = 5,$$

on aura

$$2B_3^2 = 50 = 7^2 + 1, \quad \beta = 7,$$

ce qui donnera

$$A_{3r} = \varphi_r(7), \quad B_{3r} = \frac{1}{5} \psi_r(7),$$

et l'on aura donc, en vertu de (7),

$$(14) \quad B_{6n+3} = 5(\psi_{n+1}^2(7) + \psi_n^2(7)),$$

tandis qu'il résulte, en vertu de (12),

$$(15) \quad B_{6n+3} = (2\psi_{n+1}(7) - \psi_n(7))^2 + (\psi_{n+1}(7) + 2\psi_n(7))^2.$$

XXXIII. Des nombres A_{4nr+2r} .

Soit, comme dans les deux articles précédents, a une base de première espèce, on aura quel que soit m ,

$$(1) \quad A_{4m+2} = 2A_{2m+1}^2 + 1.$$

De plus, A_{2mp+p} étant toujours divisible par A_p , on aura, pourvu que r soit un indice impair,

$$(2) \quad A_{4nr+2r} = A_{2r}(x^2 + 2y^2),$$

d'où, en vertu de (1),

$$(3) \quad A_{4nr+2r} = (x \pm 2y A_r)^2 + 2(x A_r \mp y)^2.$$

Cela posé, il résulte de (1) qu'il est toujours possible de déterminer les nombres entiers x et y , de sorte que

$$(4) \quad x + (-1)^\epsilon 2y A_r = \pm 1$$

$$(5) \quad x A_r - (-1)^\epsilon y = \pm A_{2nr+r}$$

Quant à l'équation (4), on aura la solution générale

$$(6) \quad \begin{cases} x = \pm 1 + 2m A_r \\ y = (-1)^{\epsilon-1} m, \end{cases}$$

où m est un entier quelconque, ce qui donnera, en vertu de (5),

$$(7) \quad \pm A_{2nr+r} = (\pm 1 + 2m A_r) A_r + m.$$

Or, A_{2nr+r} étant divisible par A_r , m aura évidemment la même propriété; soit donc

$$m = \mu A_r,$$

il résulte, en vertu de (7)

$$(8) \quad \pm A_{2nr+r} = (\pm 1 + 2\mu A_r^2) A_r + \mu A_r.$$

Remarquons ensuite que la formule (3) donnera, en vertu de (4) et (5), cette autre expression

$$A_{4nr+2r} = (x - (-1)^\epsilon 2y A_r)^2 + 2(x A_r + (-1)^\epsilon y)^2,$$

il résulte, en vertu de (6),

$$(9) \quad A_{4nr+2r} = (\pm 1 + 4\mu A_r^2)^2 + 2A_r^2 (\pm 1 - \mu + 2\mu A_r^2)^2,$$

ce qui donnera la formule curieuse

$$(10) \quad A_{4nr+2r} = 1 + 2(\mu \pm 1)^2 A_r^2 + 8\mu(\mu \pm 1) A_r^4 + 8\mu^2 A_r^6.$$

Soit particulièrement

$$\alpha = 2, \quad r = 1, \quad A_2 = 3, \quad A_1 = 1,$$

on aura, en vertu de (8), une expression de la forme

$$(11) \quad A_{2n+1} = 3q_n + (-1)^{\epsilon n},$$

tandis que la formule (10) donnera

$$(12) \quad A_{4n+2} = (4\varrho_n + (-1)^{\varepsilon_n})^2 + 2(\varrho_n + (-1)^{\varepsilon_n})^2.$$

Quant à l'exposant ε_n que nous venons d'introduire, la formule logarithmique (19) de l'article VII donnera ici

$$A_{2n+5} + A_{2n+1} = 6A_{2n+3},$$

d'où, en vertu de (11),

$$3\varrho_{n+2} + 3\varrho_n + (-1)^{\varepsilon_{n+2}} + (-1)^{\varepsilon_n} = 6A_{2n+3},$$

savoir

$$\varepsilon_{n+2} + \varepsilon_n = 1,$$

de sorte que nous aurons généralement

$$(12 \text{ bis}) \quad \varepsilon_{4\mu} = \varepsilon_{4\mu+1} = 0, \quad \varepsilon_{4\mu+2} = \varepsilon_{4\mu+3} = 1.$$

Quant à la formule (2), remarquons que B_{4nr} est divisible par B_{4r} , savoir par $2A_{2r}$, tandis que les B_{4nr+2r} ne possèdent pas cette propriété, puis appliquons l'égalité

$$2A_{2r}^2 = 4B_{2r}^2 + 2,$$

l'équation de FERMAT

$$(13) \quad x^2 - 2A_{2r}^2 y^2 = 1$$

a évidemment les solutions générales

$$x = \Phi_{2n}(2B_{2r}), \quad y = \Psi_{2n}(2B_{2r}),$$

et l'on aura donc

$$(14) \quad A_{4nr} = \Phi_{2n}(2B_{2r}), \quad B_{4nr} = A_{2r} \Psi_{2n}(2B_{2r}).$$

De plus, l'équation (13) donnera

$$\Phi_{2n+1}^2(2B_{2r}) - 2A_{2r}^2 \Psi_{2n+1}^2(2B_{2r}) = -2,$$

d'où, en posant

$$\Phi_{2n+1}(2B_{2r}) = 2l_{2n+1},$$

cette autre équation de FERMAT

$$(A_{2r} \psi_{2n+1}(2B_{2r}))^2 - 2t_{2n+1}^2 = 1,$$

ce qui donnera

$$(15) \quad A_{4nr+2r} = A_{2r} \psi_{2n+1}(2B_{2r}), \quad B_{4nr+2r} = \frac{1}{2} \Phi_{2n+1}(2B_{2r}),$$

donc la formule (2) se présente aussi sous cette autre forme

$$(16) \quad A_{8nr+2r} = A_{2r} (\psi_{2n+1}^2(2B_{2r}) + 2\psi_{2n}^2(2B_{2r})).$$

Soit par exemple

$$a = 2, \quad r = 1, \quad A_2 = 3, \quad B_2 = 2,$$

on aura

$$(17) \quad A_{8n+2} = 3 (\psi_{2n+1}^2(4) + 2\psi_{2n}^2(4)).$$

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Introduction	3
CHAPITRE PREMIER	
La fraction continue de Lagrange.	
I. Remarques sur le problème général	12
II. Des réduites de la fraction continue	16
III. Du calcul des nombres A_1 et B_1	21
IV. Des nombres premiers de la forme $4\nu + 3$	27
V. De la méthode de Brouncker	35
VI. Des nombres ω_r et p_r	43
CHAPITRE II	
Propriétés générales des solutions.	
VII. Formules d'addition et formules logarithmiques	50
VIII. Des nombres A_n et α_n	55
IX. Des nombres B_n	58
X. Du rang d'un nombre entier	63
CHAPITRE III	
Les polynomes de Cauchy et l'équation de Fermat.	
XI. De la base $a = a^2 + 1$	66
XII. Analogies des formules trigonométriques	74
XIII. Applications diverses	78
XIV. De la base $a = a^2 + 2$	88
CHAPITRE IV	
Des nombres $x^2 + ay^2$.	
XV. Formules générales	92
XVI. Des cubes. Propositions de Fermat	96
XVII. D'autres applications	103
CHAPITRE V.	
L'équation de Théon de Smyrne.	
XVIII. Formules générales	107
XIX. Des puissances biquadratiques	112
XX. Des nombres A_n	121
XXI. Des nombres B_n	125
XXII. Résolution de problèmes diverses	128

CHAPITRE VI

Des puissances d'un nombre premier. Pages

XXIII.	De la base $a = (2\nu + 1)^{2\varrho+1}$	135
XXIV.	De l'équation $x^4 - ay^2 = 1$	139
XXV.	De la base $2a = 2(2\nu + 1)^{2\varrho+1}$	143
XXVI.	Résolution de l'équation $x^4 - 2(2\nu + 1)^{2\varrho+1}y^2 = 1$	145

CHAPITRE VII

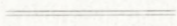
D'autres bases spéciales.

XXVII.	L'équation d'Archimède	149
XXVIII.	Applications diverses	156
XXIX.	De la base $a = 6$	161
XXX.	Problème de Lucas	167

CHAPITRE VIII

Des bases de première espèce.

XXXI.	La base a et les nombres $\omega_{\mu-1}$ et $p_{\mu-1}$	172
XXXII.	Des nombres B_{2nr+r}	176
XXXIII.	Des nombres A_{4nr+2r}	179



MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7. RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunktenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FØGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FØGH, I.: Zur Kenntniss des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse « $\text{NH}_2\text{COONH}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons (\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ » und « $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3$ ». 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. (Under Pressen)	
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. (Under Pressen).	

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 2.

ON THE STOPPING POWER OF
LITHIUM FOR α -RAYS

BY

C. JACOBSEN AND JOHS. OLSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 0,60.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige
Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende
Rækker :

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et
Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dob-
belttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Son*,
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 2.

ON THE STOPPING POWER OF
LITHIUM FOR α -RAYS

BY

C. JACOBSEN AND JOHS. OLSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

The stopping power of a substance for α -rays depends according to Bohr's theory on the number of electrons in the atom, and the frequencies of the vibrations, about their positions of equilibrium or stationary motions, which the electrons perform when they are removed from these by external forces. Due to the simplifying assumptions introduced in the calculations, however, the theoretical expressions may not be expected to offer a close approximation unless the velocities of the electrons in their stationary orbits are small compared with the velocities of the α -rays, a condition which is fulfilled only for atoms of elements with low atomic number.¹ As regards the experimental data concerning such elements accurate measurements are at hand of the stopping power of hydrogen and helium for α -rays, which have been found to be in close agreement with the theory. For a closer test of the theory it is desirable, however, to possess measurements also of the stopping power of lithium, and it will also be expected, that it may be possible by means of such measurements to obtain a test of the theoretical conceptions of the constitution of the lithium atom, affording interpretations of the spectral and chemical properties of this element. On the proposal of Professor Bohr we have therefore undertaken an experimental investigation of the stopping power of lithium for α -rays.²

¹ N. Bohr, *Phil. Mag.* XXX. S. 588, 1915.

² When the present investigation was in progress measurements of

§ 1. Methods of investigation.

The stopping power was determined by measuring the change in the range of a beam of α -rays from radium *C*, produced by sending the beam through a thin sheet of metallic lithium pressed out between two mica foils. The press used for the production of the lithium-mica preparate was designed by Professor Bohr and had the shape shown in the fig. 1, in which the left half shows the exterior appearance of the apparatus, and the right half shows the interior in section.

The whole press was made of iron and steel and consisted in the main of an iron tube *T*, to the ends of which were fastened two iron fittings which acted as guides for two pistons P_1 and P_2 of hard steel which could be moved in the direction of the axes of the tube by means of two screws S_1 and S_2 , the pressure being transferred to the pistons by means of the two small steel balls B_1 and B_2 . Besides the tube was provided with a fitting *F*, forming a small auxiliary press in which the lower end of the screw *A* acted as a piston fitting tight in a cylindrical tube, the lower end of which was closed by a steel disc *D* with a small conical hole through its centre. Further the press was

the ranges of α -particles in a large number of elements, including lithium, have been published by H. Rausch von Traubenberg (Phys. ZS. XXI. S. 588, 1920). These measurements are performed by means of a very elegant method, by which the range is measured by examining the place on a wedged shaped plate of the substance, where the α -rays are just able to penetrate through it. The accuracy which may be obtained by this method is not directly stated by v. Traubenberg, and is hardly very large for an active substance like lithium, the surface of which must be protected against the action of the air. Quite apart from the valuable survey over the stopping powers for α -rays of a large number of substances, contained in the paper mentioned, it can not therefore be said to dispense with the want in consideration of which the present investigation was undertaken.

provided with a small glass window W and two short tubes by which a stream of gas could be led through it, and of which one, H , fastened to the main tube of the press opposite the fitting F , is shown at the figure.

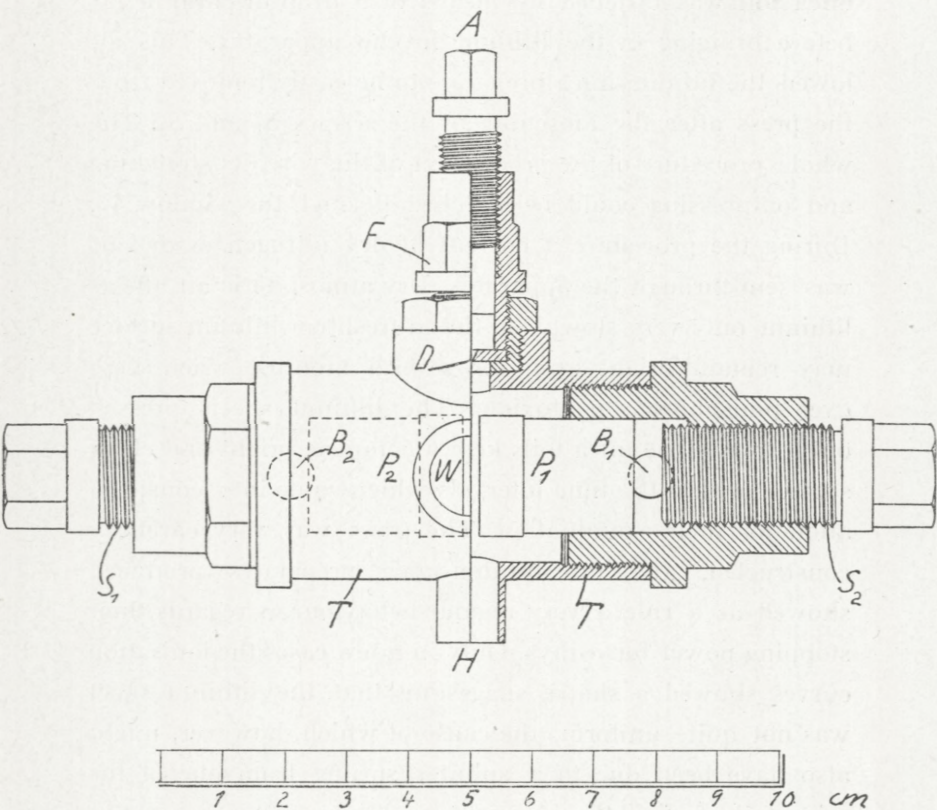


Fig. 1.

The procedure in producing a lithium-mica preparate was the following: A lump of metallic lithium was placed under the screw shown at the top of the figure and a lithium wire with diameter of about half a millimeter was formed by the soft metal protruding through the small hole in the disc D , when the piston was screwed down. This wire was led down be-

tween the plane front surfaces of the pistons P_1 and P_2 and out of the tube H and stretched by a suitable tension, before it was pressed out to a sheet by forcing together the pistons P_1 and P_2 to the plane surface of each of which a thin mica foil was fastened by means of a drop of parafine oil before bringing in the lithium in the apparatus. This allowed the lithium-mica preparate to be easily removed from the press after the loosening of the screws S_1 and S_2 . The whole procedure of the production of the wire, its stretching and outpressing could be watched through the window W . During the procedure a current of dry nitrogen or dry air was sent through the apparatus. Dry atmospheric air affects lithium only very slowly, so that a fresh cut lithium surface may remain bright even for several months, when kept over phosphorous pentoxide. The lithium sheets pressed out between the mica foils kept a complete bright and clean surface within the time intervals which came into consideration for their examination. The press was very carefully constructed, and the lithium-mica preparates produced showed as a rule a very regular behaviour as regards their stopping power for α -rays. Only in a few cases the ionisation curves showed a shape, suggesting that the lithium sheet was not quite uniform, the cause of which, however, might also have been due to a splinter sprung from one of the mica foils during the pressing.

The apparatus for measuring the change in the range of the α -rays, when sent through the lithium-mica preparate, is shown in section in fig. 2. It consists of a wide glass tube T , to the ends of which two brass rings which carried the radioactive source and the ionisation chamber were fastened by means of sealing wax. The radioactive material was deposited at the end of an iron cone C , which could

be made to fit airtight into a hollow cone H fastened to the lower brass ring, as well as into a similar cone fastened to a glass reservoir connected with a plant of radium emanation, in which the iron cone could be activated by exposure to the emanation. The lithium preparate was placed over the radioactive source on a brass disc, which could be turned round a vertical axis and which is shown in vertical projection to the right of the main figure. In this disc were two holes; above the first the preparate was applied, and above the second two mica foils of the same specimen as used for protection of the lithium sheet. To the brass disc was fastened an iron rod, shown in black in the sectional figure, which made it possible to turn the plate from the outside by means of a magnet.

The construction of the ionisation chamber, fastened to the upper brass ring, is also seen from this figure; the hatched parts indicate brass, the dotted ebonite. G is a fine metal wire gauze which through the metal wire W_1 is connected with a source of constant high potential, and which forms the lower border of the ionisation chamber, the upper border of which is formed by the brass plug K , which through the rod S and the metal wire W_2 is connected with a quadrant electrometer. K was insulated from the other metal parts by the ebonite plate E , which at the same time closed the apparatus airtight, being pressed down against a plane by means of a screw forming the lower part of a hollow cylinder, protecting S from electrostatic disturbances. The whole ionisation chamber could easily be dismantled, when the surfaces of the ebonite parts wanted cleaning. During the measurements the air in the apparatus was renewed with suitable intervals through the two tubes R_1 and R_2 in order to remove eventual traces of emanation yielded from the

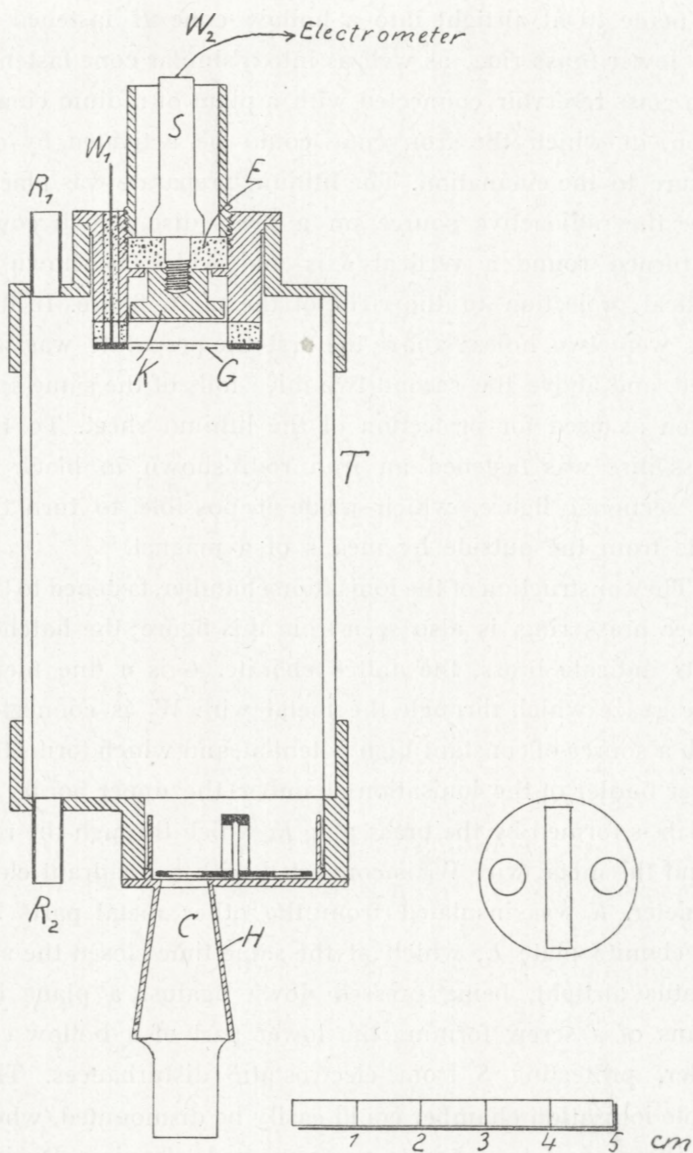


Fig. 2.

surface of the iron cone, on which the radioactive material was deposited. The β -rays were deflected by a magnet.

By varying the pressure in the apparatus the various parts of the path of the α -rays could be brought to fall within the ionisation chamber. If by the pressure p and the relative activity A the rate of charging, measured by the quadrant electrometer, is i , the quantity $I = \frac{i}{p \cdot A}$ will be a measure for the ionisation at the pressure 1 and the activity 1. If on a diagram I is represented as ordinate and p as abscissa, we get a curve of the same type as the well-known ionisationcurve of Bragg. The determination of the stopping power of the lithium sheet was now obtained by drawing curves partly with the lithium preparete introduced in the beam of α -rays, partly with introduction of two mica foils of the same specimen used at the production of the preparete, the horizontal distance d between the middle points of the steeply falling parts of the two curves, determining the air equivalent of the lithium sheet. The air equivalent referred to a pressure of 76 cm Hg and $0^\circ C$ will clearly be given by $Eq = \frac{d \cdot l \cdot 273}{76 \cdot (273 + t)}$, where l is the distance between the source of rays and the centre of the ionisation chamber, and where t is the temperature. In the actual apparatus l , measured from the upper plane surface of the activated iron cone to the plane lying in the middle between the gauze G and the surface of the brass plug K , was equal to 9,25 cm, while the temperature during the experiments was about 18 degrees. From the air equivalent the corresponding hydrogen equivalent was next calculated by means of Taylor's measurements.¹ Now, according to these measurements the relative stopping power of different substances is not quite independent of what part of the path of the range these substances are placed. In the experiments

¹ Taylor, Phil. Mag. XVIII, 604, 1909.

the air equivalent of the lithium-mica preparate was about 4 cm, giving a mean value of about 5 cm for the range in air of the rays when passing through the lithium sheet. The relative stopping power of lithium and hydrogen deduced in the experiments may therefore be taken as corresponding to α -rays of a range in air of about 5 cm which according to measurements of Geiger² corresponds to a velocity of about $1,8 \cdot 10^9$ cm.

In order to find the ratio between the atomic stopping power of lithium and hydrogen we must next know the amount of lithium present per cm² of the preparate. In order to determine this amount a circular disc with a diameter of about 5 mm was cut out of the lithium-mica preparate by means of a hollow punch. Placing this disc in boiled distilled water in a quarts retort the lithium was dissolved and the amount of lithium hydroxyd next measured by titration with hydrochloric acid.

§ 2. Results of the measurements.

The following data may serve as an example of the results of the measurements, described in the preceding chapter. In fig. 3 three ionisation curves *I*, *II* and *III* are represented, where *I* is obtained with the lithium-mica preparate, and *II* with two mica foils of same specimen while *III* is obtained before the introduction of the stopping sheets. The mean distance between the steep parts of the curves *I* and *II* was found to correspond to a pressure of 12,70 cm *Hg*, giving for the air equivalent of the lithium sheet, according to the formula indicated on p. 9, $Eg = \frac{9,25 \cdot 12,70 \cdot 273}{76,00 \cdot 289} = 1,50$ cm air. Next, a layer of air of thickness 1,50 cm at 76 cm *Hg* and 0° *C* has for α -rays with a

¹ H. Geiger, Proc. Roy. Soc. XXXIII, 505, 1910.

range of about 5 cm according to the measurements of Taylor a hydrogen equivalent of 6,08 cm, corresponding to $N_H = \frac{2 \cdot 6,08}{22,4 \cdot 1000} = 5,43 \cdot 10^{-4}$ gram atoms of hydrogen per cm^2 . As regards the determination of the amount of lithium

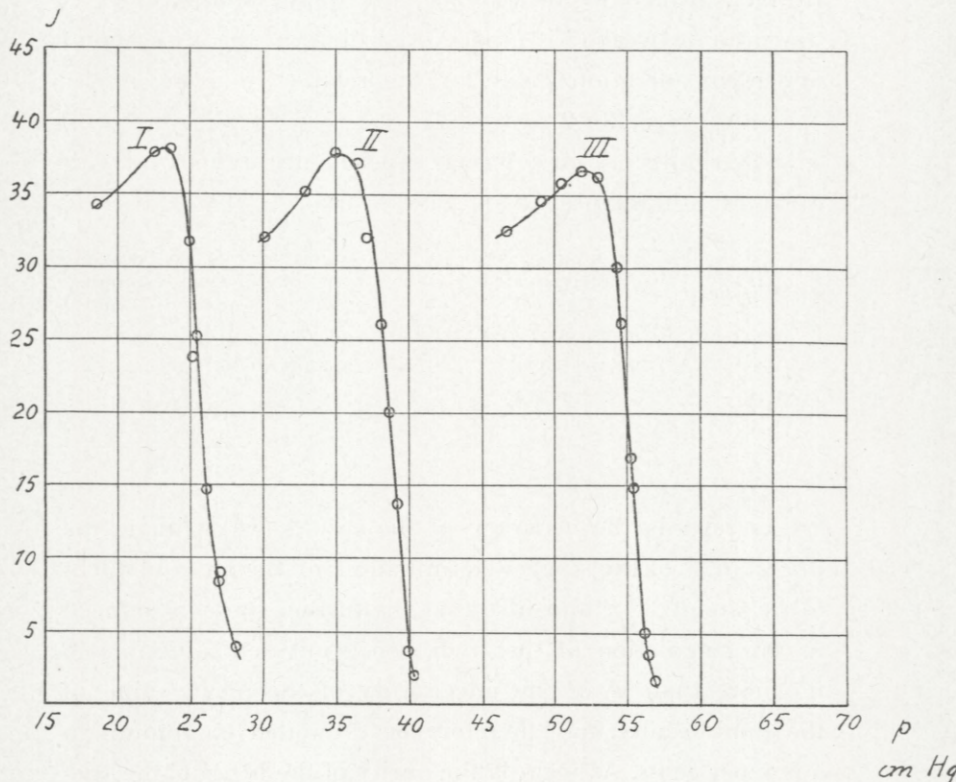


Fig. 3.

present per unit area of the prepare, the area of the disc punched out was found to be $0,215 \text{ cm}^2$ and after solving in water $2,375 \text{ cm}^3$ hydrochloric acid ($0,0199 n$) was claimed for the neutralisation of the solution. This gives for the prepare the presence of $N_{Li} = \frac{2,275 \cdot 0,0199}{0,215 \cdot 1000} = 2,20 \cdot 10^{-4}$ gram atoms of Lithium per cm^2 . Assuming a specific weight of $0,55$,

this gives for the thickness of the lithium sheet, pressed out between the mica foils ca. 0,002 cm; The accurate knowledge of this thickness, however, is not essential for the present determination of the relative stopping power. In fact, from the above data this quantity is found as the ratio between N_{Li} and N_H , which in the experiment under consideration gives for the relative stopping power $N_{Li} : N_H = 5,43 : 2,20 = 2,47 : 1$.

The results of four complete experiments of this kind with different lithium prepares gave:

Air equivalent of <i>Li</i> sheet	<i>H</i> -atoms per cm ² of equivalent sheet	<i>Li</i> -atoms per cm ² of prepare	Ratio between atomic stopping power of <i>Li</i> and <i>H</i>
1,32 cm	$0,492 \cdot 10^{-3}$	$0,207 \cdot 10^{-3}$	2,38
1,58 —	587	239	2,46
1,46 —	543	220	2,47
1,55 —	577	228	2,53
			mean 2,46

As regards the accuracy of the results we estimate the uncertainty of the single determination of the air equivalent to be about 3%, and also that the further error introduced in the calculation of the hydrogen equivalent amounts to no more than 2%. The uncertainty of the mean value of the final results may therefore be estimated to amount to a few per cents. As regards the purity of the lithium, the specimen used was "Li. met. pur." from Kahlbaum, and a chemical analysis kindly performed by Lektor Bjørn-Andersen gave as impurities present 0,35% *Na*, about 0,5% *Fe* and perhaps a little *Al*. For the estimate of the influence of these small impurities on the result we may consider not only their direct effect on the stopping power of the lithium prepare, but also their effect on the titration of the lithium sheet, which effects partly compensate each

other. Thus we may estimate in the following way, how much the presence of the iron alters the result. Let the number of gram atom of lithium per cm^2 be x_1 and of iron x_2 , and let the atomic stopping power of lithium in proportion to hydrogen be n_1 and of iron n_2 ; the measured stopping power will then be

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2}{x_1 + 3x_2} \approx n_1 + \frac{x_2}{x_1}(n_2 - 3n_1)$$

where the second member on the right side indicates the error in the result. Putting now $n_1 = 2,5$ and according to the measurements of R. v. Traubenberg $n_2 = 9,5$, and further, corresponding to the presence of $0,5\%$ iron, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{7}{55} \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{1600}$, we get for this error $\frac{9,5 - 7,5}{1600} = \frac{1}{800}$, or a value several times smaller than the uncertainty of the measurements as indicated above. In a similar way it can be shown, that the influence of $0,35\%$ Na is minimal, and that the mentioned impurities will consequently have no sensible influence on the result of the present investigation.

As regards the experiments of Rausch von Traubenberg, referred to in the note on page 4, the accuracy seems as mentioned difficult to estimate. The range for α -particles from radium C in lithium, which was found to be $0,0129$ cm, gives for the ratio between the atomic stopping power of lithium and hydrogen a value between $2,5$ and $2,7$ according to the value used for the specific gravity of lithium, which by various experimentators is given as lying between $0,59$ and $0,54$.

§ 3. Comparison with the theory.

The theory of Bohr leads to the following formula:

$$\frac{dV}{dx} = A \cdot \sum_{s=1}^{s=r} \log_{\text{nat}} B_s$$

where r is the number of electrons in the atom, and where

$$A = -\frac{4\pi e^2 E^2 N}{m M V^3}; B_s = \frac{V^3 \cdot k \cdot M \cdot m}{n_s \cdot e \cdot E (M + m)}$$

E and e denote the charge of an α -particle and an electron respectively, M and m their masses, N the number of atoms in unit volume and V the velocity of the α -particles. Moreover n_s denotes the frequency of vibrations, which one of the electrons in the atom performs when removed from its position of equilibrium or stationary orbit.

For hydrogen, where r is equal to 1, we get for an α -particle with velocity $1,8 \cdot 10^9$ cm sec, when, corresponding to atmospheric pressure and 20° , we put $\frac{N}{2} = 2,59 \cdot 10^{19}$ and for n_s introduce the value for the frequency of vibration of the electron in the atom, deduced from experiments on dispersion of hydrogen,

$$A = 3,89 \cdot 10^6 \quad \log_{\text{nat}} B_H = 6,37$$

which gives

$$\frac{dV}{dx} = -2,48 \cdot 10^7,$$

a value, which agrees very well with the values, which are determined by interpolation from the measurements of Geiger and Taylor, which with a close approximation for the mentioned velocity gives:

$$\frac{dV}{dx} = -2,5 \cdot 10^7.$$

As regards this agreement it may be noticed, that even a considerable change of n has only a small influence on the result; for instance $\frac{dV}{dx}$ will only be altered by 10%, if n is altered by a factor 2; a circumstance of essential im-

portance for the application of the theory, because the value to be introduced for n is difficult to fix with any great accuracy.¹

Asking next for a theoretical estimate of the ratio f between the atomic stopping powers in Lithium and in Hydrogen, we need only consider the ratio between the characteristic frequencies of vibration of the three electrons in the lithium atom and the frequency of the electron in the hydrogen atom. In fact, if the frequencies of the electrons in the lithium atom are denoted by $n_1 = x_1 n$, $n_2 = x_2 n$, $n_3 = x_3 n$ respectively, where n is the frequency of the electron in the hydrogen atom, we get

$$f = \frac{dV}{dx_{Li}} : \frac{dV}{dx_H} = 3 - \frac{\log_{nat} x_1 x_2 x_3}{\log_{nat} B_H}$$

or

$$f = 3 - \frac{1}{6,37} \cdot \log_{nat} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

As regards the values of the frequencies n_1 , n_2 , n_3 , we possess no direct evidence, for instance from measurements of dispersion in Lithium vapour. We must expect, that the ratios x_1 , x_2 , x_3 with approximation will be equal to the ratios between the frequency of revolutions of the electrons in the lithium atom and the frequency of revolution of the electron in the hydrogen atom, which ratios may be supposed to be known with considerable accuracy from recent work on atomic constitution. Thus we may suppose, that the two of the three lithium electrons will move in orbits, small in proportion to that of the hydrogen electron and will possess frequencies of revolution, which are about 8 times greater than the frequency of revolution of the hydrogen electron. The third electron in a neutral

¹ Compare N. Bohr, Phil. Mag. XXV, 23, 1913.

isolated atom in its normal state may on the other hand be supposed to move in an orbit larger than that of the hydrogen atom and to have a frequency of revolution about 4 times smaller. This gives approximately

$$x_1 x_2 x_3 = 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 16$$

and consequently

$$\log_{nat} x_1 x_2 x_3 = 2,77$$

from which we get $f = 2,56$ a value which within the accuracy of the measurements agrees with the experimental value $f = 2,46$.

Considering this result we notice in the first instance, that the accuracy of experiments is not great enough, by means of the given formulæ, to determine the quantity $x_1 x_2 x_3$ with an approximation amounting to more than a factor 2. On the other hand the approximative character of the theory would also hardly make it legitimate to assign a definite meaning to an attempt of evaluating this quantity more accurately. Nevertheless it will be seen, that the comparison of the results of the experiments with the theory offers a very direct support for the conclusion, that in spite of the loose binding of the valency electron, the electrons of the lithium atom are "in mean" considerably stronger bound than the electron in the hydrogen atom, such as we must expect from the theory of atomic structure.

Concluding remarks.

The stopping power of lithium for α -rays was determined by measuring the change in the range of the rays produced by penetrating through a thin sheet of metallic lithium, pressed out between two mica foils. The ratio between the stopping power of a lithium atom and a hydrogen atom

was found with an uncertainty of a few per cent to be 2,46; a value which is in good agreement with Bohr's theory,

The investigations dealt with in this paper were performed at the physical laboratory of the polytechnical college of Copenhagen. On the completion of the work we wish to thank all those, who have assisted us during the experiments, above all Professor Bohr for much valuable advice, Professor Prytz for the permission to use the apparatus of the laboratory, Lektor Bjørn-Andersen for the execution of the chemical analysis of the lithium employed, and Professor Salomonsen for the permission to make use of the radium preparete.

Færdig, fra Trykkeriet den 11. Maj 1922.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7. RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MØLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921.....	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse « $\text{NH}_2\text{COONH}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons (\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ » und « $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3$ ». 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922	0.60
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922	0.70

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 3.

NOGLE BEMÆRKNINGER
ANGAAENDE INTERPOLATION MED
ÆQUIDISTANTE ARGUMENTER

AF

N. E. NØRLUND



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 1,10.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 % billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*,
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 3.

NOGLE BEMÆRKNINGER
ANGAAENDE INTERPOLATION MED
ÆQUIDISTANTE ARGUMENTER

AF

N. E. NØRLUND



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

1. Ved numeriske Regninger gør man ofte Brug af visse Interpolationsformler, der tjener til at beregne Værdierne af en Funktion, hvis successive Differenser er givne, eller til at beregne en saadan Funktions Differentialkvotienter og Integraler. Den vigtigste af disse er STIRLING'S Interpolationsformel:

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{\underline{s}} (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - (s-1)^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} H(-s) \\ + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - s^2)}{(2s+1)!} \nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1),$$

samt GAUSS' Formel og BESSEL'S Formel, som slutter sig nær til denne, og som alle tre er et specielt Tilfælde af den almindelige Newton'ske Interpolationsformel. Disse Formler anvendes i Særdeleshed ved de astronomiske Ephemerideberegninger, samt naar det drejer sig om at konstruere en Tabel over en Funktion, som enten er exact given eller med Tilnærmelse bekendt ved en Række Iagttagelser, f. Ex. naar man vil beregne en Dødelighedstavle. Interpolationsformlerne afledes som Regel ved symbolske Metoder¹, altsaa uden egentligt Bevis, og ved Benyttelsen indskrænker man sig til at medtage et ringe Antal af Rækkens første Led, og opnaar derved i Almindelighed en god Approximation, naar blot Tabellens Interval er valgt tilstrækkelig

¹ Se f. Ex. Encyclopédie des Sciences mathématiques, tome I. vol. 4, p. 49—59.

lille. Men det kunde være af Interesse at vide i hvilke Tilfælde Rækken konvergerer. Svaret paa dette Spørgsmaal er ret overraskende, idet det, som vi skal se, kun er en meget speciel Klasse af Funktioner, som kan fremstilles ved de nævnte Rækker. I det store Flertal af de Tilfælde, hvor man anvender den Stirling'ske Interpolationsformel, er denne altsaa divergent. Dette hindrer dog ikke, at man med Fordeel kan benytte den, idet den har en semikonvergent Karakter. Hvis man f. Ex. vil beregne en Logarithmetabel, saa vilde det være en altfor besværlig Sag at direkte beregne $\log z$ for alle Argumentværdier. Man nøjes med at bestemme $\log z$ for et ringe Antal Værdier af z og beregner derefter Logarithmens Værdi for de mellemliggende Argumentværdier ved Hjælp af Stirling's eller Gauss' Interpolationsformel. Denne Fremgangsmaade sparer megen Tid, og den giver en tilfredsstillende Nøjagtighed, naar Tabellens Interval er tilstrækkelig lille, saafremt man blot medtager nogle faa Led i Rækken. Men hvis man medtager et for stort Antal Led i Interpolationsrækken, saa faar man en ganske falsk Logarithmetabel.

Et andet bemærkelsesværdigt specielt Tilfælde af den Newton'ske Interpolationsformel faar man ved i en æquidistant Tabel at interpolere efter faldende Skraalinie. Man føres derved til en Række af Formen

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s (z - \omega) (z - 2\omega) \cdots (z - s\omega). \quad (1)$$

Set fra et regneteknisk Synspunkt er denne Række mindre hensigtsmæssig end den Stirlingske, og den anvendes derfor ogsaa kun sjældent. De første Led af Rækken giver nemlig en daarligere Approximation end de første Led af Stirlings Formel. Men kuriøst nok stiller Konvergenzfor-

holdene sig her langt gunstigere. Den Klasse af Funktioner, der kan fremstilles ved en Række af Formen (1), omfatter som et ganske specielt Tilfælde de Funktioner, der kan fremstilles ved Stirling's Formel. Man har her et interessant Exempel paa, hvor stor Forskel der er paa de Krav, som Matematikeren og den praktiske Beregner stiller til de Rækker, de opererer med. Vi skal dog først i en senere Meddelelse indgaa paa en nærmere Omtale af Rækken (1) og her begrænde os til de tre førstnævnte Interpolationsrækker og navnlig undersøge under hvilke Forudsætninger disse konvergerer.

2. Lad os først betragte en Række af Formen

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s z (z^2 - 1^2) (z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2) \quad (2)$$

hvor Koefficienterne a_s ikke afhænger af z . Hvis z er et helt Tal (inklusive 0), saa reducerer Rækken sig til et endeligt Antal Led. Vi skal nu vise følgende Sætning. Hvis Rækken (2) konvergerer for $z = z_0$, hvor z_0 ikke er et helt Tal, saa konvergerer den ligelig i ethvert endeligt Omraade af z -Planen. Dette følger let af det saakaldte Abel'ske Konvergenzkriterium¹. Sætter man nemlig

$$b_s = a_s z_0 (z_0^2 - 1^2) (z_0^2 - 2^2) \cdots (z_0^2 - s^2),$$

$$u_s(z) = \frac{z (z^2 - 1^2) (z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2)}{z_0 (z_0^2 - 1^2) (z_0^2 - 2^2) \cdots (z_0^2 - s^2)},$$

saa har man

$$u_s(z) - u_{s+1}(z) = u_s(z) \frac{z^2 - z_0^2}{(s+1)^2 - z_0^2}.$$

Restleddet i Rækken (2) kan da skrives saaledes

¹ Bromwich: Theory of infinite series, London 1908, p. 205-7.

$$\begin{aligned} \sum_{s=n}^{s=m} b_s u_s(z) &= \sum_{s=n}^{s=m} (u_s(z) - u_{s+1}(z)) \sum_{\nu=n}^{\nu=s} b_\nu + u_{m+1}(z) \sum_{\nu=n}^{\nu=m} b_\nu \\ &= (z^2 - z_0^2) \sum_{s=n}^{s=m} \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \sum_{\nu=n}^{\nu=s} b_\nu + u_{m+1}(z) \sum_{\nu=n}^{\nu=m} b_\nu. \quad (3) \end{aligned}$$

For at se, hvorledes u_s forholder sig for meget store Værdier af s dividerer vi Tæller og Nævner i u_s med $(s!)^2$; vi faar da

$$u_s(z) = \frac{z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)}. \quad (4)$$

Af dette Udtryk følger umiddelbart at, naar s vokser ud over enhver Grændse, saa konvergerer $u_s(z)$ ligelig mod en Grændseværdi, saafremt z er beliggende i et vilkaarligt endeligt Omraade. Denne Grændseværdi er

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_s(z) = \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0}.$$

I Følge Forudsætning kan man nu finde et Tal N saaledes at

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\nu=s} b_\nu \right| < \varepsilon, \quad \text{for } s \geq n \geq N.$$

Af (3) finder man da følgende Ulighed

$$\left| \sum_{s=n}^{s=m} b_s u_s(z) \right| < C \varepsilon \sum_{s=n}^{s=m} \frac{1}{|(s+1)^2 - z_0^2|} + C \varepsilon < C_1 \varepsilon,$$

hvor C og C_1 er af z uafhængige Konstanter. Sætningen er hermed bevist. Hvis Rækken (2) er konvergent fremstiller den altsaa altid en hel Funktion, som vi vil betegne med $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s z (z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2).$$

For at danne os et Skøn over hvilke hele Funktioner, som kan fremstilles ved denne Række vil vi søge en Majorantværdi for $H(z)$. Rækken (2) kan naturligvis være absolut konvergent i hele Planen. Men det kan ogsaa hænde, at den er betinget konvergent for alle Værdier af z , som er forskellige fra de hele Tal. Vi vil derfor først transformere Rækken til en absolut konvergent Række. Vi benytter dertil Identiteten (3) idet vi i denne sætter $n = 0$ og lader m vokse ud over enhver Grændse. Vi faar da

$$H(z) = H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} + (z^2 - z_0^2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=s} b_{\nu}.$$

Det er aabenbart, at denne Række er absolut konvergent, thi u_s nærmer sig, som vi har set, en endelig Grændseværdi, naar $s \rightarrow \infty$, og Rækken $\sum b_{\nu}$ er i Følge Forudsætning konvergent. Vi kan da finde en Konstant C saaledes at

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=s} b_{\nu} \right| < C \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Vi faar heraf følgende Ulighed

$$\left| H(z) \right| < \left| H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} \right| + C \left| z^2 - z_0^2 \right| \sum_{s=0}^{\infty} \left| \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \right|. \quad (5)$$

Da vor Forudsætning, at Rækken (2) konvergerer for $z = z_0$, medfører, at denne Række konvergerer overalt, saa kan vi uden at indskrænke Almindeligheden antage, at $0 < z_0 < 1$. Af (4) følger da at

$$\begin{aligned}
 |u_s(z)| \left| \frac{|z^2 - z_0^2|}{(s+1)^2 - z_0^2} \right| &\leq \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{|z|^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)} \frac{|z|^2 + z_0^2}{(s+1)^2 - z_0^2} \\
 &= \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{|z|^2}{(s+1)^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{(s+1)^2}\right)} - \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Altsaa er

$$\begin{aligned}
 &\left| z^2 - z_0^2 \right| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|u_s(z)|}{(s+1)^2 - z_0^2} \\
 &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{|z|^2}{(s+1)^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{(s+1)^2}\right)} - \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)} \right) \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)} - \frac{|z|}{z_0} \\
 &= \frac{sh \pi |z|}{\sin \pi z_0} - \frac{|z|}{z_0},
 \end{aligned}$$

hvor shz er den hyperbolske sinus af z . Substituerer vi nu dette Udtryk i Uligheden (5) faar vi

$$\left| H(z) \right| < \left| H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} \right| + C \left(\frac{sh \pi |z|}{\sin \pi z_0} - \frac{|z|}{z_0} \right).$$

Hvis altsaa $H(z)$ er en Funktion, som kan fremstilles ved Rækken (2), saa kan vi finde en Konstant K saaledes at

$$|H(z)| < K e^{\pi |z|} \quad (6)$$

for alle z . Denne Ulighed ophører at gælde, hvis vi i Exponenten erstatter π med et Tal, som er mindre end π . Funktionen

$$\sin \omega z$$

kan nemlig fremstilles ved en Række af Formen (2), hvis $-\pi < \omega < \pi$. Derimod eksisterer en saadan Udvikling ikke hvis $\omega = \pi$. Ligesaa kan Funktionen

$$\frac{\cos \pi z - 1}{z}$$

fremstilles ved en Række af den nævnte Art.

3. Det er altsaa kun hele Funktioner, hvis Orden er ≤ 1 , som der kan være Tale om at fremstille ved en af de ovenfor omtalte Interpolationsrækker. For nu at se hvilke yderligere Betingelser man maa paalægge Funktionen vil vi udtrykke Rækkens Restled ved Hjælp af Cauchy's Integral. Lad $H(x)$ betegne en hel Funktion og lad os for Kortheds Skyld sætte

$$\begin{aligned} \Delta H(x) &= H(x+1) - H(x), \\ \Delta^n H(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} H(x)). \end{aligned}$$

For de successive Differenser af $H(x)$ finder man da følgende Integraludtryk

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\zeta) d\zeta}{\zeta - x}, \\ \Delta H(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\zeta) d\zeta}{(\zeta - x)(\zeta - x - 1)}, \\ \Delta^n H(x) &= \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{H(\zeta) d\zeta}{(\zeta - x)(\zeta - x - 1) \cdots (\zeta - x - n)}, \end{aligned}$$

hvor Integrationsvejen er en i positiv Omløbsretning gennemløben Cirkel med Nul som Centrum og saa stor Radius, at Cirklen omslutter Punkterne $x, x+1, \dots, x+n$. Man har nu følgende Identitet

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\psi_1(\zeta)} + \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(\zeta)} + \frac{\psi_2(z)}{\psi_3(\zeta)} + \dots + \frac{\psi_{n-1}(z)}{\psi_n(\zeta)} + \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(\zeta)} \frac{1}{\zeta - z}, \quad (7)$$

hvor $\psi_\nu(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_\nu)$.

Vi vælger først Tallene a_ν paa følgende Maade

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = -n, \quad a_{2n+1} = n.$$

Man finder da

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{s=0}^n \frac{(z+s)(z+s-1) \cdots (z-s+1)}{(\zeta+s)(\zeta+s-1) \cdots (\zeta-s)} + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z+s)(z+s-1) \cdots (z-s)}{(\zeta+s+1)(\zeta+s) \cdots (\zeta-s)} \\ + \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2) \cdots (z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2) \cdots (\zeta^2-n^2)} \frac{1}{\zeta - z}.$$

Vi multiplicerer begge Sider af denne Ligning med $H(\zeta)$ og integrerer med Hensyn til ζ langs med en i positiv Om-løbsretning gennemløben Cirkel C_n , som har Nul som Cen-trum og en Radius, som er større end n . Vi faar da

$$H(z) = \sum_{s=0}^n \binom{z+s}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \sum_{s=0}^{n-1} \binom{z+s}{2s+1} \Delta^{2s+1} H(-s-1) + R_{2n+1}, \quad (8)$$

hvor

$$R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2) \cdots (z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2) \cdots (\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (9)$$

Det er herved forudsat, at Punktet z ligger inden for Cirkelen C_n . Denne Række betegnes almindeligvis som GAUSS' Interpolationsformel¹. Vælger vi derimod i (7) Tallene a_ν paa følgende Maade

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = n, \quad a_{2n+1} = -n,$$

saa faar vi i Stedet for (8) følgende analoge Formel

$$H(z) = \sum_{s=0}^n \binom{z+s-1}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \sum_{s=0}^{n-1} \binom{z+s}{2s+1} \Delta^{2s+1} H(-s) + R_{2n+1}. \quad (10)$$

¹ C. F. Gauss, Werke 3, Göttingen 1876, p. 329. J. F. Encke, Gesam-melte mathematische und astronomische Abhandlungen, Berlin 1888, p. 1.

Adderer vi Rækkerne (8) og (10) til hinanden Led for Led saa faar vi STIRLING's Interpolationsformel¹

$$H(z) = \sum_{s=0}^n \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} H(-s) \\ + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1) + R_{2n+1}, \quad (11)$$

hvor R_{2n+1} har den ved (9) angivne Værdi, og hvor vi for Kortheds Skyld har sat

$$\nabla H(x) = \frac{H(x+1) + H(x)}{2}.$$

Hvis vi i begge Rækkerne (11) giver s Værdierne 0, 1, 2, \dots $n-1$ saa finder vi for Restleddet efter $2n$ Led R_{2n} følgende Udtryk

$$R_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-(n-1)^2)(z\zeta-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\cdots(\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \quad (12)$$

En anden bemærkelsesværdig Udvikling faas paa følgende Maade. Vi erstatter i (10) z med $z + \frac{1}{2}$ og $H(z)$ med $H(z - \frac{1}{2})$. Vi erstatter i (8) z med $z - \frac{1}{2}$ og $H(z)$ med $H(z + \frac{1}{2})$. Adderer vi de to derved fremkomne Rækker til hinanden Led for Led faar vi BESSEL's Interpolationsformel

$$H(z) = \sum_{s=0}^n \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s)!} \nabla \Delta^{2s} H(-s-\frac{1}{2}) \\ + z \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s+1)!} \Delta^{2s+1} H(-s-\frac{1}{2}) + \mathfrak{R}_{2n+1}, \quad (13)$$

hvor

¹ Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730.

$$\Re_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (z^2 - (n - \frac{1}{2})^2) H(\zeta)}{(\zeta^2 - (\frac{1}{2})^2)(\zeta^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (\zeta^2 - (n - \frac{1}{2})^2) \zeta - z} dz, \quad (14)$$

$$\Re_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2) \cdots (z^2 - (n - \frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2 - (\frac{1}{2})^2) \cdots (\zeta^2 - (n + \frac{1}{2})^2)} (z\zeta - (n + \frac{1}{2})^2) \frac{H(\zeta)}{\zeta - z} dz. \quad (15)$$

4. Vi vil nu vise, at disse Restled konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$, saafremt $H(z)$ tilfredsstillter en vis Ulighed. Vi betragter først R_{2n+1} . Vi kan uden at ændre dette Integrals Værdi deformere Cirkelen C_n og erstatte den med den i hosstaaende Fig. 1 angivne Integrationsvej. KAB og DEF betegner Buer af en Cirkel med Centrum o og Radius $\log n$. Som Integrationsvej vælger vi Kurven $ABCDEFGKA$

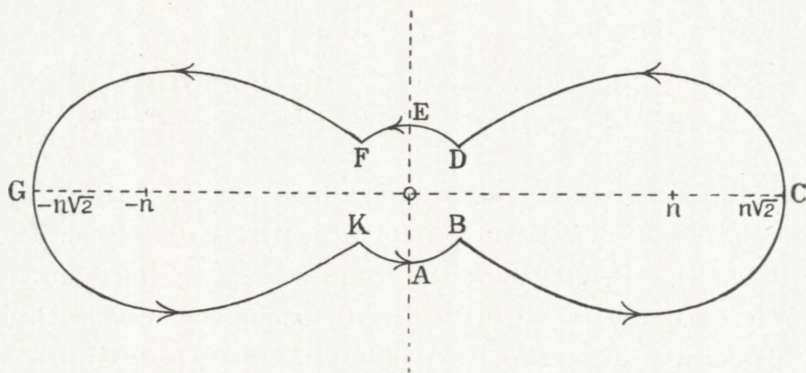


Fig. 1.

sammensat af de to nævnte Cirkelbuer og af to Buer BCD og FGK af den Bernoulli'ske Lemniscat, som har Ligningen $r = n\sqrt{2} \cos 2\vartheta$. Denne Kurvè skærer altsaa de reelle Tals Axe i Punkterne $\pm n\sqrt{2}$. Ved at vælge Integrationslinien paa denne Maade opnaar vi, at de nedenfor angivne Uligheder bliver saa præcise som overhovedet muligt. Da Integrationsvejen er symmetrisk med Hensyn til

den imaginære Axe, saa kan Integralet (9) reduceres og skrives saaledes

$$R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} z(z^2-1^2)\cdots(z^2-n^2) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\cdots(\zeta^2-n^2)\zeta^2-z^2} dz, \quad (16)$$

hvor vi for Kortheds Skyld har sat

$$H_1(\zeta) = \zeta(H(\zeta) - H(-\zeta)) + z(H(\zeta) + H(-\zeta)). \quad (17)$$

Lad v_n betegne det mindste positive Tal, som tilfredsstiller Ligningen

$$\cos 2v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\log n}{n} \right)^2. \quad (18)$$

v_n er da mindre end $\frac{\pi}{4}$, og man har aabenbart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{\pi}{4}.$$

Sætter vi $\zeta = re^{i\theta}$, saa er Integrationslinien altsaa sammensat af

Buen AB , hvor $r = \log n$ og $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -v_n$,

Buen BCD , hvor $r = n\sqrt{2\cos 2v}$ og $-v_n \leq \theta \leq v_n$,

Buen DE , hvor $r = \log n$ og $v_n \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Integralet (16) kan vi skrive paa følgende Form

$$R_{2n+1} = z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{(-1)^n (n!)^2 \Gamma(\zeta - n) H_1(\zeta)}{\Gamma(\zeta + n + 1) \zeta^2 - z^2} dz.$$

Det foran Integraltegnet staaende Produkt konvergerer mod en endelig Grændseværdi naar $n \rightarrow \infty$, nemlig mod $\frac{\sin \pi z}{\pi}$. Det gælder da blot om at undersøge det sidste Integral. Vi dekomponerer dette i tre Dele og sætter

$$R_{2n+1} = z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \frac{1}{2\pi i} (P_n + Q_n + T_n),$$

hvor

$$P_n = \int_{AB} Q_n = \int_{BCD} T_n = \int_{DE}.$$

Paa Buen BCD har man nu

$$\zeta = n\sqrt{2 \cos 2v} e^{iv},$$

altsaa
$$d\zeta = in\sqrt{2 \cos 2v} (1 + i \operatorname{tg} 2v) e^{iv} dv,$$

$$\left| \frac{d\zeta}{dv} \right| = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}}.$$

Sætter vi for Kortheds Skyld

$$f_n(v) = (-1)^n \frac{(n!)^2 \Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + n + 1)} \quad (19)$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n + \zeta) \Gamma(n - \zeta)} \frac{n^2}{n^2 - \zeta^2}, \quad (20)$$

saa er altsaa

$$P_n = i \log n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f_n(v) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} e^{iv} dv,$$

$$Q_n = in \int_{-v_n}^{+v_n} f_n(v) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} \sqrt{2 \cos 2v} (1 + i \operatorname{tg} 2v) e^{iv} dv, \quad (21)$$

$$T_n = i \log n \int_{v_n}^{\frac{\pi}{2}} f_n(v) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} e^{iv} dv. \quad (22)$$

5. For nu at se hvilken Betingelse man maa paalægge H for at opnaa, at disse Integraler konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$, definerer vi i Intervallet $-\pi \leq v \leq \pi$ en kontinuert Funktion $\psi(v)$ saaledes

$$\left. \begin{aligned} \psi(v) &= \cos v \log (\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2 \cos v})^2 \\ &+ 2 \sin v \operatorname{arc} \sin (\sqrt{2 \sin v}), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

saafremt $0 \leq |v| \leq \frac{\pi}{4}$ eller $\frac{3\pi}{4} \leq |v| \leq \pi$. Derimod er

$$\psi(v) = \pi |\sin v|, \quad (24)$$

saafremt $\frac{\pi}{4} \leq |v| \leq \frac{3\pi}{4}$. Da denne Funktion spiller en afgørende Rolle for vort Problem, vil vi desangaaende bemærke følgende.

Den tilfredsstillende Ligningerne

$$\left. \begin{aligned} \psi(v) &= \psi(-v), \\ \psi(v) &= \psi(\pi - v), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

og den er aabenbart kontinuert, thi af begge de angivne Udtryk følger, at

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Man har endvidere

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi(\pm\pi) = 2\log(1 + \sqrt{2}), \\ \psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) &= \pi. \end{aligned}$$

Vi vil nu vise, at $\psi(v)$ har Minima i Punkterne 0 og $\pm\pi$, samt Maxima i Punkterne $\pm\frac{\pi}{2}$. Vi betragter først Intervallet $0 \leq v \leq \frac{\pi}{4}$. Man har aabenbart

$$\arcsin(\sqrt{2} \sin v) = \sqrt{2} \int_0^v \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}, \quad (26)$$

$$\log(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2} \cos v) = \sqrt{2} \int_v^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}. \quad (27)$$

Af den sidste Ligning følger specielt for $v = 0$

$$\log(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Udtrykket (23) kan da skrives saaledes

$$\begin{aligned} \psi(v) &= 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \cos v \int_0^v \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}} + 2\sqrt{2} \sin v \int_0^v \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}} \\ &= 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \int_0^v \frac{\sin(v-x) \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Differentieres med Hensyn til v faas

$$\psi'(v) = -2\sin v \log(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \int_0^v \frac{\cos(v-x)}{\sqrt{\cos 2x}} \, dx. \quad (29)$$

Differentieres endnu en Gang faas

$$\psi''(v) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} - \psi(v). \quad (30)$$

Af (28) følger nu at

$$\begin{aligned} \psi(v) &\leq 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} \int_0^v \sin(v-x) \, dx \\ &= 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} (1 - \cos v). \end{aligned}$$

Altsaa er

$$\psi''(v) \geq 2\cos v \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} - \log(1+\sqrt{2}) \right).$$

Men heraf fremgaar, at $\psi''(v) > 0$ i det betragtede Interval. Da nu i Følge (29)

$$\psi'(0) = 0,$$

saa er $\psi'(v)$ altsaa positiv, kontinuert og voksende i Intervallet $0 < v \leq \frac{\pi}{4}$. Af dette Resultat samt af Udtrykket (24) kan vi da slutte, at $\psi(v)$ er positiv, kontinuert og voksende i Intervallet $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Af Ligningerne (25) følger sluttelig at $\psi(v)$ har de ovenfor angivne Maxima og ingen andre. Man har altsaa for alle Værdier af v

$$\pi \geq \psi(v) \geq 2 \log(1 + \sqrt{2}) > 0.$$

Af (23), (26) og (27) kan vi ogsaa aflede følgende Udtryk for $\psi(v)$

$$\psi(v) = \pi \sin v + 2\sqrt{2} \int_v^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-v) dx}{\sqrt{\cos 2x}},$$

og heraf følger, at i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v \geq 0$ er

$$\psi(v) > \pi \sin v.$$

6. Sætter man

$$h(v) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-\log |H(re^{iv})|}{r} \quad (31)$$

saa har vi i § 2 vist, at Interpolationsrækkens Konvergens medfører, at

$$h(v) \leq \pi$$

for alle Værdier af v . Men det er blot i Punkterne $v = \pm \frac{\pi}{2}$, at $h(v)$ kan naa den angivne øvre Grændse π . Man kan nemlig ved en mere detailleret Analyse vise, at

$$h(v) \leq \psi(v).$$

Det er endvidere let at se, at vore ovenfor angivne Restled konvergerer mod Nul, saafremt

$$h(v) < \psi(v)$$

for alle Værdier af v . Men vi kan endda vise noget mere. Vi antager, at Funktionen $H(\zeta) = H(re^{iv})$, for $r \geq r_0$, tilfredsstiller Ulighederne

$$|H(\zeta) - H(-\zeta)| < e^{r\psi(v)} r^{\beta_1}, \quad (32)$$

$$|H(\zeta) + H(-\zeta)| < e^{r\psi(v)} r^{\beta_2}. \quad (33)$$

Lad β betegne det største af Tallene β_1 og $\beta_2 - 1$; man kan da finde en Konstant C saaledes at

$$|H_1(re^{iv})| < Ce^{r\psi(v)} r^{\beta+1} \quad (34)$$

for $r \geq r_0$. Vi vil nu vise, at R_{2n+1} konvergerer mod Nul, hvis β er negativ. For at indse dette, maa vi undersøge, hvorledes $|f_n(v)|$ forholder sig for meget store Værdier af n . Vi antager først, at $v_n > v > -v_n$. Man har som bekendt

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} (1 + \varepsilon(x)), \quad (35)$$

hvor $\varepsilon(x)$ konvergerer mod Nul, naar $|x|$ vokser ud over enhver Grændse og samtidig x fjerner sig uendelig langt fra de negative Tals Axe. Af Udtrykket (19) følger da at

$$\begin{aligned} f_n(v) &= (-1)^n \frac{(\Gamma(n))^2 \Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + n)} \frac{n^2}{\zeta + n} \\ &= (-1)^n 2\pi \left(\frac{n^2}{\zeta^2 - n^2} \right)^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\zeta - n}{\zeta + n} \right)^\zeta (1 + \varepsilon(n)), \end{aligned} \quad (36)$$

hvor $\varepsilon(n)$ konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. For $v_n > v > -v_n$ har vi nu

$$\zeta = re^{iv} = n\sqrt{2 \cos 2v} e^{iv}.$$

Heraf følger at $\zeta^2 - n^2 = n^2 e^{4iv}$.

Altsaa er
$$\left| \frac{\zeta^2 - n^2}{n^2} \right| = 1.$$

Endvidere er

$$\begin{aligned} \frac{\zeta - n}{\zeta + n} &= \frac{2 \cos 2v - 1 + i 2 \sin v \sqrt{2 \cos 2v}}{(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2 \cos v})^2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\cos 2v} + i \sqrt{2 \sin v}}{\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2 \cos v}} \right)^2. \end{aligned}$$

Men af denne Ligning følger at

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta - n}{\zeta + n} \right| &= (\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2 \cos v})^{-2}, \\ \arg \frac{\zeta - n}{\zeta + n} &= 2 \arcsin (\sqrt{2 \sin v}). \end{aligned}$$

Af Udtrykket (36) kan vi da slutte at

$$\begin{aligned} |f_n(v)| &= 2\pi \left| \left(\frac{\zeta - n}{\zeta + n} \right)^\zeta (1 + \varepsilon(n)) \right| \\ &= 2\pi e^{-r\psi(v)} |1 + \varepsilon(n)|. \end{aligned}$$

Af Ligningen (21) i Forbindelse med Uligheden (34) faar vi nu

$$\begin{aligned} |Q_n| &\leq n \int_{-v_n}^{+v_n} |f_n(v)| \left| \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} \right| \frac{\sqrt{2} dv}{\sqrt{\cos 2v}} \\ &< n C_1 \int_{-v_n}^{+v_n} |f_n(v)| e^{r\psi(v)} r^{\beta-1} \frac{dv}{\sqrt{\cos 2v}} \\ &< n^\beta C_2 \int_{-v_n}^{+v_n} (\cos 2v)^{\frac{1}{2}\beta-1} dv \\ &= 2 C_2 n^\beta \int_0^{v_n} (\cos 2v)^{\frac{1}{2}\beta-1} dv, \end{aligned}$$

hvor C_1 og C_2 er Konstanter. Vi deler det sidste Integral i to Dele, og faar da

$$|Q_n| < 2 C_2 n^\beta \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2v)^{\frac{1}{2}\beta-1} dv + 4 C_2 n^\beta \int_{\frac{\pi}{6}}^{v_n} \frac{\sin 2v dv}{(\cos 2v)^{1-\frac{1}{2}\beta}}.$$

Vi antager nu, at $\beta < 0$. Det første Integral paa højre Side konvergerer da mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. Det sidste Integral er lig med

$$\begin{aligned} &2 C_2 n^\beta \int_{\cos 2v_n}^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}\beta-1} dx \\ &= 4 C_2 \beta^{-1} n^\beta \left(2^{-\frac{1}{2}\beta} - (\cos 2v_n)^{\frac{1}{2}\beta} \right) \\ &= 2^{2-\frac{1}{2}\beta} C_2 \beta^{-1} \left(n^\beta - (\log n)^\beta \right). \end{aligned}$$

Men da β i Følge Forudsætning er negativ, saa konvergerer denne Størrelse mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. Altsaa har vi vist at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0.$$

Vi vil dernæst betragte Integralet T_n og maa da først undersøge, hvorledes $f_n(v)$ forholder sig paa Cirkelbuen DE , naar n antages meget stor. f_n kan skrives paa Formen (20). Af Gammafunktionens asymptotiske Udtryk (35) kan vi slutte, at

$$\frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n+\zeta)\Gamma(n-\zeta)} \frac{n^2}{n^2-\zeta^2} = \left(\frac{n^2}{n^2-\zeta^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n-\zeta}{n+\zeta}\right)^\zeta (1+\varepsilon(n)).$$

Vi sætter nu $\zeta = \log n \cdot e^{iv}$ og faar da, at

$$\frac{n-\zeta}{n+\zeta} = \frac{n^2 - \log^2 n - 2in \log n \sin v}{n^2 + \log^2 n + 2n \log n \cos v}.$$

Altsaa er

$$\left| \frac{n-\zeta}{n+\zeta} \right|^2 = 1 - \frac{4n \log n \cos v}{n^2 + \log^2 n + 2n \log n \cos v},$$

$$\arg \frac{n-\zeta}{n+\zeta} = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2n \log n \sin v}{n^2 - \log^2 n}.$$

Sætter vi

$$\varphi(n) = \frac{4n \log n \cos v}{n^2 + \log^2 n + 2n \log n \cos v},$$

saa faar vi heraf

$$\left| \left(\frac{n-\zeta}{n+\zeta} \right)^\zeta \right| = e^{\frac{1}{2} \log n \cos v \log(1-\varphi(n)) + \log n \sin v \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2n \log n \sin v}{n^2 - \log^2 n}}.$$

Naar $n \rightarrow \infty$, saa konvergerer denne Størrelse ligelig mod 1. Endvidere er

$$\left| \frac{n^2 - \zeta^2}{n^2} \right|^2 = 1 - \frac{2}{n^2} \log^2 n \cos 2v + \frac{\log^4 n}{n^4}.$$

Altsaa

$$\left| \frac{n^2}{n^2 - \zeta^2} \right|^{n+\frac{1}{2}} = e^{-(n+\frac{1}{2}) \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2}{n^2} \log^2 n \cos 2v + \frac{\log^4 n}{n^4} \right)}.$$

Ogsaa denne Størrelse konvergerer mod 1, naar $n \rightarrow \infty$. Altsaa har vi vist at, hvis $|\zeta| = \log n$, saa er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n + \zeta) \Gamma(n - \zeta)} \frac{n^2}{n^2 - \zeta^2} = 1.$$

Vi kan altsaa finde en Konstant c saaledes at paa Buen DE

$$|f_n(v)| < ce^{-r\pi \sin v}.$$

For Integralet (22) faar jeg da følgende Majorantudtryk

$$\begin{aligned} |T_n| &< C_1 r^{-1} \int_{v_n}^{\frac{\pi}{2}} |f_n(v) H_1(re^{iv})| dv \\ &< C_2 r^{-1} \int_{v_n}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\pi \sin v} |H_1(re^{iv})| dv, \end{aligned}$$

hvor C_1 og C_2 betegner Konstanter. Vi deler dette Integral i to Dele og erstatter H_1 med den ved Uligheden (34) angivne øvre Grændse. Vi faar da

$$|T_n| < CC_2 r^\beta \int_{v_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r(\psi(v) - \pi \sin v)} dv + CC_2 r^\beta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dv.$$

Det sidste Led konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$, fordi $\beta < 0$. Af Ligningen (18) følger endvidere at

$$\frac{\pi}{4} - v_n < \frac{1}{2} \left(\frac{\log n}{n} \right)^2.$$

Da nu den kontinuerte Funktion $\psi(v) - \pi \sin v$ forsvinder i Punktet $v = \frac{\pi}{4}$, saa kan vi finde et positivt Tal N saaledes at for $n > N$ er

$$\psi(v) - \pi \sin v < 1, \quad \text{hvis } \frac{\pi}{4} \geq v \geq v_n.$$

Man har da

$$\begin{aligned} \int_{v_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r(\psi(v) - \pi \sin v)} dv &= \int_{v_n}^{\frac{\pi}{4}} n^{\psi(v) - \pi \sin v} dv \\ &< n \left(\frac{\pi}{4} - v_n \right) < \frac{n}{2} \left(\frac{\log n}{n} \right)^2, \end{aligned}$$

og denne Størrelse konvergerer mod Nul, naar n vokser ud over enhver Grændse. Heraf følger at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0.$$

Paa samme Maade ser man, at $P_n \rightarrow 0$. Vi har dermed bevist, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1} = 0,$$

hvis $\beta < 0$. Gauss' Interpolationsrækker

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\binom{z+s}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \binom{z+s-1}{2s-1} \Delta^{2s-1} H(-s) \right],$$

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\binom{z+s-1}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \binom{z+s-1}{2s-1} \Delta^{2s-1} H(-s+1) \right]$$

er altsaa konvergente, saafremt $H(z)$ er en hel Funktion, der tilfredsstiller Ulighederne (32) og (33), hvor

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 < 1. \quad (37)$$

Betragter vi dernæst Integralet (12), saa kan vi decomponere dette i to Integraler og skrive Restleddet R_{2n} under følgende Form

$$R_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(n-1)^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\cdots(\zeta^2-(n-1)^2)} \frac{H(\zeta) + H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-n^2)}{(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\cdots(\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta) - H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta.$$

Man ser heraf umiddelbart, at Ulighederne (37) ogsaa medfører, at disse to Integraler konvergerer mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. Stirling's Række:

$$H(z) = H(0) + \frac{z}{1} \nabla \Delta H(-1) + \frac{z^2}{2!} \Delta^2 H(-1) +$$

$$+ \frac{z(z^2-1^2)}{3!} \nabla \Delta^3 H(-2) + \frac{z^2(z^2-1^2)}{4!} \Delta^4 H(-2) + \cdots$$

er altsaa konvergent, hvis β_1 og β_2 tilfredsstillter Ulighederne (37).

Restleddene (14) og (15) til Bessel's Række kan vi reducere til følgende Form

$$\begin{aligned} \Re_{2n+1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (z^2 - (n - \frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2 - (\frac{1}{2})^2)(\zeta^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (\zeta^2 - (n - \frac{1}{2})^2)} \frac{H(\zeta) - H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (z^2 - (n + \frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2 - (\frac{1}{2})^2)(\zeta^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (\zeta^2 - (n + \frac{1}{2})^2)} \zeta \frac{H(\zeta) + H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta \\ \Re_{2n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (z^2 - (n - \frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2 - (\frac{1}{2})^2)(\zeta^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (\zeta^2 - (n - \frac{1}{2})^2)} \frac{H_2(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta, \end{aligned}$$

hvor

$$H_2(\zeta) = \zeta [H(\zeta) + H(-\zeta)] + z [H(\zeta) - H(-\zeta)].$$

Aldeles samme Ræsonnement som ovenfor viser da, at disse Restled konvergerer mod Nul, det vil sige, at Bessel's Række konvergerer saafremt

$$\beta_1 < 1, \quad \beta_2 < 0. \quad (38)$$

Hvis $H(z)$ er en ulige Funktion, er Bessel's Række altsaa den fordelagtigste, men hvis $H(z)$ er en lige Funktion, er Stirling's Række at foretrække.

Angaaende Gauss' Række vil vi endnu bemærke følgende. Vi har ovenfor vist at, hvis man i denne forener to og to paa hinanden følgende Led til eet, saa bliver den derved fremkomne Række konvergent, saafremt Betingelserne (37) er opfyldt. Men hvis man ikke foretager en saadan Sammentrækning af Rækkens Led, saa er disse Betingelser ikke tilstrækkelige til at sikre Konvergens. Vi maa i saa Fald endnu vise, at Rækkens Led konvergerer mod Nul. Man har nu

$$\binom{z+n}{2n} \Delta^{2n} H(-n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - (n-1)^2)(z+n)}{\zeta(\zeta^2 - 1^2) \cdots (\zeta^2 - n^2)} (H(\zeta) + H(-\zeta)) d\zeta, \quad (39)$$

Dette Integral konvergerer mod Nul, hvis Tallet β_2 er negativt, naar v tilhører Intervallet $\frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}$. Gauss' Række

$$H(z) = H(0) + \binom{z}{1} \Delta H(-1) + \binom{z+1}{2} \Delta^2 H(-1) + \binom{z+1}{3} \Delta^3 H(-1) + \dots$$

er altsaa konvergent, saafremt $\beta_1 < 0$ og

$$\beta_2 < 1 \quad \text{for} \quad \frac{3\pi}{4} > v > \frac{\pi}{4},$$

$$\beta_2 < 0 \quad \text{for} \quad \frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}.$$

Heraf følger, at $\cos \pi z$ kan fremstilles ved Gauss' Række, som for denne Funktion tager Formen

$$\cos \pi z = 1 + 2 \binom{z}{1} - 2^2 \binom{z+1}{2} - \dots + (-1)^n 2^{2n} \binom{z+n}{2n} \left. \begin{array}{l} \\ + (-1)^n 2^{2n+1} \binom{z+n}{2n+1} + \dots \end{array} \right\} (40)$$

Man verificerer ogsaa let, at denne Række konvergerer betinget i hele Planen. Sætter man derimod i Gauss' Række $H(z) = \sin \pi z$, saa bliver alle Rækkens Koefficienter Nul. Funktionen $\sin \pi z$ kan altsaa ikke fremstilles ved en saadan Række. Denne Funktion tilfredsstiller vor Ulighed for $\beta_1 = 0$. Dette Exempel viser derfor, at det er nødvendigt at forudsætte $\beta_1 < 0$.

7. Exemplet $H(z) = \cos \pi z$ viser, at vore Konvergenzbetingelser ikke er tilstrækkelige til at sikre absolut Konvergens. Betegner vi Leddene i Gauss' Række med u_0, u_1, u_2, \dots saa er u_{2n} lig med Integralet (39) og

$$u_{2n+1} = \binom{z+n}{2n+1} \Delta^{2n+1} H(-n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2) \dots (z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2) \dots (\zeta^2-(n+1)^2)} [(n+1)(H(\zeta)+H(-\zeta))+\zeta(H(\zeta)-H(-\zeta))] d\zeta.$$

Disse to Integraludtryk viser, at man kan finde et positivt Tal ε saaledes at

saafremt
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (\log n)^{1+\varepsilon} u_n = 0.$$

$$\beta_1 < -1, \quad \beta_2 < -2.$$

Disse to Uligheder medfører altsaa, at begge de Gauss'iske Interpolationsrækker konvergerer absolut.

For Stirling's Række har man

$$u_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(n-1)^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\cdots(\zeta^2-n^2)} (H(\zeta)+H(-\zeta)) d\zeta,$$

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-n^2)}{(\zeta^2-1^2)\cdots(\zeta^2-(n+1)^2)} (H(\zeta)-H(-\zeta)) d\zeta,$$

og heraf følger, at Stirling's Række konvergerer absolut, saafremt

$$\beta_1 < -1, \quad \beta_2 < 0.$$

Ligesaa ser man, at Bessel's Række konvergerer absolut, saafremt

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 < -1.$$

Hvis specielt $H(z)$ er en lige Funktion, saa er

$$\nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1) = 0,$$

$$\Delta^{2s+1} H(-s-\frac{1}{2}) = 0, \quad \nabla \Delta^{2s} H(-s-\frac{1}{2}) = \Delta^{2s} H(-s-\frac{1}{2}).$$

Stirling's Formel reducerer sig derfor til

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} H(-s), \quad (41)$$

og Bessel's Formel reducerer sig til

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s)!} \Delta^{2s} H(-s-\frac{1}{2}). \quad (42)$$

Hvis $H(z)$ er en ulige Funktion, saa er

$$\Delta^{2s} H(-s) = 0, \quad \nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1) = \Delta^{2s+1} H(-s), \\ \nabla \Delta^{2s} H(-s-\frac{1}{2}) = 0.$$

Stirling's Formel reducerer sig derfor til

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \Delta^{2s+1} H(-s), \quad (43)$$

og Bessel's Formel reducerer sig til

$$H(z) = z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s+1)!} \Delta^{2s+1} H(-s-\frac{1}{2}). \quad (44)$$

Da Funktionen $\cos \pi z$ tilfredsstillter Betingelserne (37) saa faar vi af (41) den konvergente Udvikling

$$\cos \pi z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s}}{(2s)!} z^2 (z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2). \quad (45)$$

Funktionen $\sin \pi z$ tilfredsstillter Betingelserne (38) og kan derfor fremstilles ved Rækken (44) som reducerer sig til

$$\sin \pi z = z \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s+1}}{(2s+1)!} (z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2). \quad (46)$$

Ligesaa finder vi de konvergente Udviklinger

$$\frac{\cos \pi z - \cos \pi \alpha}{z^2 - \alpha^2} = \cos \pi \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(\alpha^2-(\frac{1}{2})^2)(\alpha^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(\alpha^2-(s+\frac{1}{2})^2)}, \\ \frac{\alpha \sin \pi z - z \sin \pi \alpha}{z^2 - \alpha^2} = \sin \pi \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-s^2)}{(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\cdots(\alpha^2-(s+1)^2)},$$

hvor α er et vilkaarligt Tal, som ikke gør en af Nævnerne til Nul.

8. Af det ovenfor sagte følger a fortiori, at alle fire Interpolationsrækker konvergerer absolut, saafremt den ved Ligningen (31) definerede Funktion $h(v)$ tilfredsstillter Uligheden

$$h(v) < \psi(v)$$

for alle Værdier af v . Af særlig Interesse er det Tilfælde, hvor $h(v) = \psi(v)$ i et endeligt Antal Punkter i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$, medens $h(v) < \psi(v)$ for alle andre Værdier af v . Vi skal se at vore Konvergensbetingelser i dette Tilfælde kan noget præciseres. Lad os først betragte følgende Exempel:

$$H(z) = t^{2z}.$$

For hvilke Værdier af t kan denne Funktion fremstilles ved vore Rækker? En nødvendig Betingelse for at Gauss' Række konvergerer er, at Rækkens Led konvergerer mod Nul, altsaa at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^{2n} H(-n)}{\sqrt{n} 2^{2n}} = 0.$$

Man har nu

$$\Delta^{2n} H(-n) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n}.$$

En nødvendig Betingelse for Konvergens er altsaa, at

$$\left|t - \frac{1}{t}\right| \leq 2. \text{ Kurven } \left|t - \frac{1}{t}\right| = 2$$

bestaar af de to i Fig. 2 angivne Cirkler:

$$|t - 1| = \sqrt{2}, \quad |t + 1| = \sqrt{2}$$

med Radius $\sqrt{2}$ og med Centrum respektive i Punkterne $+1$ og -1 . Hvis t er beliggende i det Indre af et af de to skraverede Omraader, saa er $\left|t - \frac{1}{t}\right| < 2$, absolut Konvergens foreligger altsaa i dette Tilfælde. Hvis t er beliggende uden for de skraverede Omraader, saa er $\left|t - \frac{1}{t}\right| > 2$ og Rækkerne følgelig divergente. Vi vil nu først søge Maximum af $|t^{2z}|$, naar t gennemløber Kontouren AFCBA. Lad os sætte

$$t = 1 + \sqrt{2} e^{i\varphi}, \quad z = r e^{i\nu}.$$

Vi har da paa Buen AFC

$$|t^{2z}| = e^{r\lambda(\varphi)},$$

hvor

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= \cos \nu \log(3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi) \\ &- 2 \sin \nu \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}}. \end{aligned} \quad (47)$$

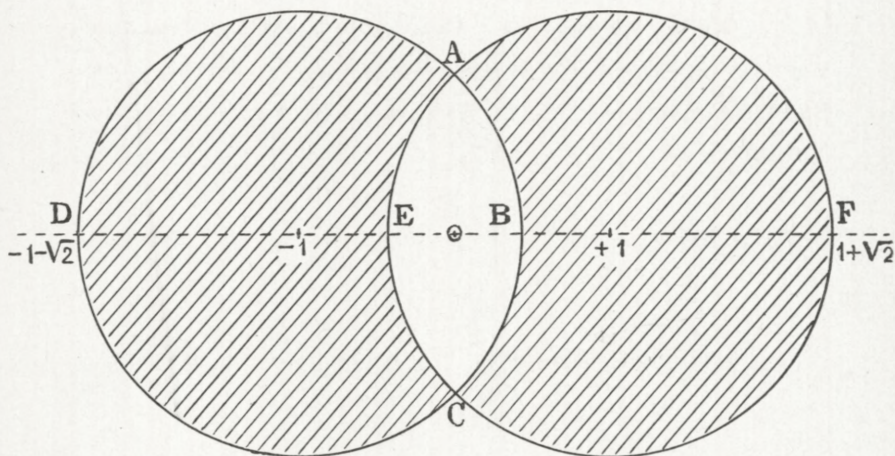


Fig. 2.

Differentieres med Hensyn til φ faas

$$\lambda'(\varphi) = -2\sqrt{2} \frac{\sin(\nu + \varphi) + \sqrt{2} \sin \nu}{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}.$$

Hvis $\frac{3\pi}{4} > \nu > \frac{\pi}{4}$, saa er $\lambda' < 0$, fordi $\sqrt{2} \sin \nu > 1$. I Intervallet $\frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{3\pi}{4}$ er $\lambda(\varphi)$ derfor aftagende, og den tager sin største Værdi i Punktet $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, nemlig

$$\lambda\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \pi \sin \nu.$$

Hvis $-\frac{\pi}{4} > v > -\frac{3\pi}{4}$, saa er $\lambda' > 0$, fordi $-\sqrt{2} \sin v > 1$.

I Intervallet $\frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{3\pi}{4}$ er $\lambda(\varphi)$ derfor voksende, og den tager sin største Værdi i Punktet $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, nemlig

$$\lambda\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\pi \sin v.$$

Hvis $\frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}$, saa forsvinder λ' i eet og kun eet Punkt i Intervallet $\frac{3\pi}{4} > \varphi > -\frac{3\pi}{4}$, nemlig for den Værdi af φ , som tilfredsstillter Ligningen

$$\sin(v + \varphi) + \sqrt{2} \sin v = 0.$$

Man ser let, at $\lambda(\varphi)$ antager sin største Værdi i dette Punkt. Af den sidste Ligning afleder vi nu at

$$\cos \varphi = \cos v \sqrt{\cos 2v} - \sqrt{2} \sin^2 v,$$

$$\sin \varphi = -\sin v \sqrt{\cos 2v} - \sqrt{2} \sin v \cos v,$$

hvor $\sqrt{\cos 2v}$ antages positiv. Men heraf følger, at

$$3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi = (\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2} \cos v)^2,$$

$$\frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}} = -\sqrt{2} \sin v.$$

Substituerer vi nu disse Udtryk i Ligningen (47), saa ser vi, at Maximum af $\lambda(\varphi)$ er den ved Udtrykket (23) definerede Funktion $\psi(v)$.

Hvis endelig $\pi \geq |v| > \frac{3\pi}{4}$ saa er

$$\lambda(\varphi) < \psi(v).$$

Lader vi t variere paa Buen ABC , saa finder vi samme Majorantudtryk blot med den Forskel, at de to sidstnævnte Intervaller har byttet Rolle. Sammenfatter vi disse Resultater, saa følger heraf, at

$$|t^{2z}| \leq e^{r\psi(v)},$$

naar t beskriver Kontouren $AFCBA$. Den angivne Maximalværdi naas i eet og kun eet Punkt paa Kurven. Dette Punkt er A eller C , hvis $\frac{\pi}{4} \leq |v| \leq \frac{3\pi}{4}$, men hvis v ligger uden for dette Interval, er det et fra A og C forskelligt Punkt.

Lad nu t være et fast Punkt paa den nævnte Kontour, Punkterne A og C undtagne. For at fixere Tanken kan vi antage, at t ligger paa Buen AFC , altsaa at

$$t = 1 + \sqrt{2} e^{i\varphi}, \quad \frac{3\pi}{4} > \varphi > -\frac{3\pi}{4}.$$

Man har da

$$|t^{2z}| = e^{r\mu(v)},$$

hvor

$$\mu(v) = \cos v \log(3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi) - 2 \sin v \arcsin \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}},$$

Vi har set, at $\mu(v) \leq \psi(v)$,

og at Lighedstegnet kun gælder for een Værdi af v i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$, nemlig for $v = \alpha$, hvor α bestemmes af Ligningen

$$\sin(\alpha + \varphi) + \sqrt{2} \sin \alpha = 0.$$

Udtrykker vi φ ved α , saa kan $\mu(v)$ skrives saaledes

$$\begin{aligned} \mu(v) &= \cos v \log(\sqrt{\cos 2\alpha} + \sqrt{2} \cos \alpha)^2 \\ &\quad + 2 \sin v \arcsin(\sqrt{2} \sin \alpha). \end{aligned}$$

Ved Differentiation faas heraf

$$\begin{aligned} \mu'(v) &= -\sin v \log(\sqrt{\cos 2\alpha} + \sqrt{2} \cos \alpha)^2 \\ &\quad + 2 \cos v \arcsin(\sqrt{2} \sin \alpha). \end{aligned}$$

Man har nu

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \cos v \log(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2} \cos v)^2 \\ &\quad + 2 \sin v \arcsin(\sqrt{2} \sin v), \\ \psi'(v) &= -\sin v \log(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2} \cos v)^2 \\ &\quad + 2 \cos v \arcsin(\sqrt{2} \sin v). \end{aligned}$$

Altsaa er $\mu(\alpha) = \psi(\alpha)$, $\mu'(\alpha) = \psi'(\alpha)$

og $\mu(v) < \psi(v)$

for alle andre Værdier af v .

Jeg antager nu, at den hele Funktion $H(z) = H(re^{iv})$ er saaledes beskaffen, at i Nærheden af et vist Punkt $v = \alpha$ i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$ gælder Ulighederne

$$\begin{aligned} |H(z) - H(-z)| &< e^{r\mu(v)} r^{\beta_1}, \\ |H(z) + H(-z)| &< e^{r\mu(v)} r^{\beta_2} \end{aligned} \quad |v - \alpha| < \eta$$

for $r > r_0$, og at for øvrigt

$$h(v) < \psi(v) \quad \text{for } v \gtrsim \alpha.$$

Ved Undersøgelse af Restleddet R_{2n+1} kommer det da blot an paa Integralet

$$Q'_n = \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-r\psi(v)} r^{-1} |H_1(re^{iv})| \frac{dv}{\cos 2v}.$$

Vi betegner med β det største af Tallene β_1 og $\beta_2 - 1$. Man kan da bestemme en Konstant C saaledes at

$$Q'_n < C \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} r^\beta e^{-r(\psi(v)-\mu(v))} \frac{dv}{\cos 2v}. \quad (48)$$

Nu er

$$\begin{aligned} \mu''(v) &= -\mu(v), \\ \psi''(v) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} - \psi(v), \end{aligned}$$

altsaa

$$\psi''(\alpha) - \mu''(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Vi udvikler $\psi - \mu$ efter Potenser af $v - \alpha$ og finder da

$$\psi(v) - \mu(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}} (v - \alpha)^2 + \dots$$

Vælger vi η tilstrækkelig lille, saa kan vi finde en positiv Konstant c saaledes at

$$\psi(v) - \mu(v) > \frac{c(v - \alpha)^2}{\sqrt{\cos 2v}} \quad \text{for } |v - \alpha| < \eta.$$

Vi tænker os endvidere η valgt saa lille at

$$\frac{\pi}{4} > \alpha + \eta > \alpha - \eta > -\frac{\pi}{4}.$$

Af (48) følger da

$$\begin{aligned} Q'_n &< C_1 n^\beta \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-cn(v-\alpha)^2} dv \\ &= C_1 n^\beta \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-cnv^2} dv \\ &= C_1 n^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{-\eta\sqrt{n}}^{+\eta\sqrt{n}} e^{-cv^2} dv \\ &< C_1 n^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cv^2} dv \end{aligned}$$

Hvis $\beta < \frac{1}{2}$, saa vil altsaa Q'_n og følgelig ogsaa R_{2n+1} konvergere mod Nul, naar $n \rightarrow \infty$. Stirling's Række er altsaa konvergent, hvis

$$\beta_1 < \frac{1}{2}, \quad \beta_2 < \frac{3}{2}.$$

Paa samme Maade ser man, at Bessel's Række konvergerer, hvis

$$\beta_1 < \frac{3}{2}, \quad \beta_2 < \frac{1}{2},$$

og at Gauss' Række konvergerer, hvis

$$\beta_1 < \frac{1}{2}, \quad \beta_2 < \frac{1}{2}.$$

Hvis der i Intervallerne $\frac{\pi}{4} > |v| \geq 0$, $\pi \geq |v| > \frac{3\pi}{4}$ findes et endeligt Antal Punkter α af den nævnte Beskaffenhed, saa skal de tilsvarende Uligheder naturligvis være opfyldt for ethvert saadant Punkt.

Sætter man i Gauss' Række $H(z) = t^{2z}$, saa faar man

$$t^{2z} = 1 + \left. \begin{aligned} & \binom{z}{1} t \left(t - \frac{1}{t} \right) + \binom{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + \binom{z+1}{3} t \left(t - \frac{1}{t} \right)^3 + \dots \\ & + \binom{z+n-1}{2n} \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2n} + \binom{z+n}{2n+1} t \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2n+1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Af Stirling's Række faar man ligesaa

$$t^{2z} + t^{-2z} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!} \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2s}, \quad (50)$$

$$t^{2z} - t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t} \right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2s+1}. \quad (51)$$

Og af Bessel's Række faas endelig

$$t^{2z} + t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t} \right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2 - (s - \frac{1}{2})^2)}{(2s)!} \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2s}, \quad (52)$$

$$t^{2z} - t^{-2z} = 2z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2 - (s - \frac{1}{2})^2)}{(2s+1)!} \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2s+1}. \quad (53)$$

Af hvad vi lige har sagt fremgaar, at disse Rækker konvergerer og fremstiller de angivne Funktioner, saafremt t er beliggende paa Kontouren $AFCBA$, Punkterne A og C undtagne. Funktionen $t^{2z} \pm t^{-2z}$ har nemlig to Punkter α af den nys angivne Beskaffenhed og for alle andre Værdier af v er

$$h(v) < \psi(v).$$

I alle Punkter paa Kontouren $AFCBA$ er nu

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| = 2$$

og i hele det af denne Kontour begrænsede skraverede Omraade er

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| < 2.$$

Men heraf følger, at de fem sidste Ligninger er gyldige i hele dette Omraade. Men de er ogsaa kun gyldige i dette Omraade. Hvis nemlig t er beliggende i Gebetet $AECDA$, saa er Rækkerne ganske vist konvergente, men de fremstiller ikke de paa venstre Side angivne Funktioner, thi Rækkerne bliver enten uforandrede eller ændrer Fortegn, naar t erstattes med $-t$. Hvis t ligger helt udenfor de to skraverede Omraader, saa er

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| > 2$$

og Rækkerne følgelig divergente. Hvis endelig t ligger i Punkterne A eller C , saa reducerer (50) sig til Ligningen (45), og (53) reducerer sig til Ligningen (46). Disse to Ligninger er altsaa gyldige ogsaa for $t = \pm i$. Dette gælder derimod ikke om de tre andre Ligninger.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

1. BIND (Kr. 8,80):

	Kr. Ø.
1. CHRISTIANSEN, C.: Experimentalundersøgelser over Gnidnings- elektricitetens Oprindelse. VI. 1917	0.25
2. KNUDSEN, MARTIN: Fordampning fra Krystaloverflader. 1917.	0.25
3. BRØNSTED, J. N., og PETERSEN, AGNES: Undersøgelser over Om- dannelsen af reciproke Saltpar, samt over Benzidin-Benzidinsulfat- Ligevægten. Affinitetsstudier XI. 1917	0.60
4. ANDERSEN, A. F.: Sur la multiplication de séries absolument convergentes par des séries sommables par la méthode de Cesàro. 1918	0.90
5. BRØNSTED, J. N.: En thermodynamisk Relation mellem Bland- ingsaffiniteterne i delvis mættede Opløsninger og dens Anven- delse til Affinitetsbestemmelse. Affinitetsstudier XII. 1918 ...	0.90
6. NIELSEN, NIELS: Recherches sur les polynomes d'Hermitte. 1918	1.75
7. PEDERSEN, P. O.: Om Townsends Teori for Stødionisation. 1918	0.30
8. KØHL, TORVALD: Stjernesked over Danmark og nærmeste Om- lande 1913—1917. 1918	0.30
9. TSCHERNING, M.: Moyens de contrôle de verres de lunettes et de systèmes optiques en général. 1918	0.45
10. TSCHERNING, M.: Une échelle de clarté, et remarques sur la vision à faible éclairage. 1918.....	0.70
11. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part I. A preli- minary investigation. 1919	1.75
12. KROGH, AUGUST: The Composition of the Atmosphere. An ac- count of preliminary investigations and a programme. 1919 ..	0.45
13. HARTMANN, JUL.: Om en ny Metode til Frembringelse af Lyd- svingninger. 1919	1.25
14. CHRISTIANSEN, J. A.: On the Reaction between Hydrogen and Bromine. 1919	0.65
15. TSCHERNING, M.: La théorie de Gauss appliquée à la réfraction par incidence oblique. 1919	1.25

2. BIND (Kr. 12,95):

1. WINTHER, CHR.: The photochemical Decomposition of Hydrogen Peroxide. 1920.....	0.60
2. WINTHER, CHR.: The photochemical Oxidation af Hydriodic Acid. 1920	0.90
3. WINTHER, CHR.: The photochemical Efficiency of the absorbed Radiation. 1920.....	1.15
4. ZEUTHEN, H. G.: Sur l'origine de l'algèbre. 1919	2.25
5. MITTAG-LEFFLER, G.: Talet. Inledning till teorien för analytiska funktioner. 1920	2.00

6. CHRISTIANSEN, C. og CHRISTIANSEN, JOHANNE: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VII. 1919	1.15
7. CHRISTIANSEN, C.: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VIII. 1919	0.60
8. HARTMANN, JUL.: Overfladepændingens Indflydelse ved Udstrømning af en Vædske i Straaleform. 1919	1.10
9. FAURHOLT, CARL: Über den Nachweis von Chlorid neben Bromid. 1919	0.50
10. BRØNSTED, J. N.: On the Solubility of Salts in Salt Solutions. Studies on Solubility I. 1919	1.50
11. HOLST, HELGE: Die kausale Relativitätsforderung und Einsteins Relativitätstheorie. 1919	2.00
12. NIELSEN, NIELS: Recherches sur les Polynomes de Stirling. 1920	3.50

3. BIND.

1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7. RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 4.

THE PRINCIPLE
OF THE SPECIFIC INTERACTION
OF IONS

BY

J. N. BRØNSTED



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1921

Pris: Kr. 1,15.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 % billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*,
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 4.

THE PRINCIPLE
OF THE SPECIFIC INTERACTION
OF IONS

BY

J. N. BRØNSTED



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1921

1. Introduction.

While on the basis of the theory of complete dissociation of the strong electrolytes¹ the thermodynamic properties of salt solutions are fairly satisfactorily accounted for by making the electrical forces arising from the net charges of the ions responsible for the deviations of such solutions from the ideal state, the total ion concentration here appearing as the predominating factor, a more detailed examination of activity coefficients especially by means of solubility measurements² has shown the activity of ions to depend very markedly on their individual nature and also to be distinctively influenced by the nature of the salt solution serving as solvent. It seems to the writer, therefore, that further progress in this field can be expected only by a thorough study of those individual properties of the ions.

In recent papers MAC INNES³ and HARNED⁴ have given interesting contributions to the question of the activities of separate ions. The first principles introduced by MAC INNES that the activity of the cation and anion in the same solution may differ from one another does not conflict

¹ For literature see *Journ. Amer. Chem. Soc.* **42**, 761 (1920).

² Brønsted og Agnes Petersen, *ibid.* **43**, (1921).

³ Mac Innes, *ibid.* **41**, 1086 (1919).

⁴ Harned, *ibid.* **42**, 1808 (1920).

with previous views because the assumption of equality of the activity coefficients has been used only as a conscious approximation in order to simplify the question in hand. The second principle, that the activity of the chloride ion, at any given concentration, is independent of the cation associated with it, and especially the more generalized form of this principle suggested by HARNED is, however, of much more questionable nature.

This principle stated by the authors as »the principle of the independent activity coefficients of the ions« involves the necessity that a certain ion dissolved in slight amounts in various salt solutions of the same concentration should possess the same activity coefficients independent of the nature of the solvent. This, however, can not be true because the solubility of a slightly soluble salt varies largely when passing from one solvent to another. Measurements made in this laboratory show the departure for a uni-univalent salt in two uni-univalent solvents to amount in many cases to 10 p. ct. in 0.1 *N* solutions. Of course if the concentration decreases this departure will likewise decrease, but only for the reason that activity coefficients with decreasing concentration generally approach the same ideal value. It is a consequence of the results referred to above, that the activity coefficient of an ion is to a similar extent a function of the nature of this ion itself and of the solvent containing it.

The incorrectness of the principle, however, appears most strikingly by the following thermodynamic reasoning: In a mixture of $n_1, n_2, n_3 \dots$ molecules with the activities $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ and the activity coefficients f_1, f_2, f_3, \dots the equation

$$\sum n_1 d \ln \xi_1 = \sum n_1 d \ln n_1 + \sum n_1 d \ln f_1 = 0$$

holds thermodynamically¹, and the numbers of molecules being constant is reduced to

$$\sum n_1 d \ln f_1 = 0.$$

This equation shows that when a salt solution is gradually changed into another salt solution of the same concentration and the activity coefficients, according to the principle, remain constant, the same will be the case with the activity of the solvent. All salt solutions of the same concentration must, therefore, have the same freezing point involving again the same activity coefficient for all ions independent of their nature. The principle of the independent activity coefficients, therefore, end in the assumption of equal activity coefficients for all ions. This thermodynamic result shows clearly that this principle can not be true².

¹ See section 8 of this paper.

² In a recent interesting paper LEWIS and RANDALL (Journ. Amer. Chem. Soc. **43**, 1112 (1921)) have given a complete treatment of the theory of ion activities, in which the principle here in question is accepted and extended by introducing a new conception the ionic strength. In spite of the obvious importance to be attached to the results resting upon the application of this conception, the conclusions of these authors as regards the problem here at hand are hardly compatible with the extensive amount of experimental material now available. It does not agree for instance with the fact found by Brønsted and Agnes Petersen (Journ. Amer. Chem. Soc. **43**, (1921) that in the case of polyvalent ions the electric type is of marked influence upon the solubility. It seems as if this inconsistency may at least partly arise from the fact that the solubility of rather soluble salts was made a basis of the conclusions. Evaluating solubility data for activity determination in various solvents is only possible in a region of somewhat higher concentration than that corresponding to the solubility of the saturating salt in pure water. In the case of thallos chloride f. inst. the solubility of which is 0.016 in pure water, the apparent steep convergence of the curves corresponding to the various solvents (Fig. 4 p. 1134) does not involve a similar disappearance of the individualities of the solvents, but simply indicates the gradual approach of the composition of the saturated solutions to pure thallos chloride solutions. If a supposed much less soluble modification of $TlCl$ could be employed we would certainly find appreciable

The principle of the independent activity coefficients is based on a conjectured relation between activity and electric conductivity of ions. Without going into details respecting the availability of such a relation, the present writer wishes to emphasize the advantage of making thermodynamically related phenomena such as freezing-points, solubilities and electromotive forces a basis for calculations of activity and osmotic coefficients. By associating experimental results from these various fields of investigation it seems to be possible to reach a more detailed survey of the thermodynamic properties of solutions particularly as regards the problem of the mutual electric interaction of the ions and their salting out effect.

The possibility of interpreting the properties of salt solution from this point of view has already been touched in a previous article¹. The object of the present paper is to prove that the activity coefficient of an ion is made up of several factors, partly depending upon properties belonging to the medium partly upon an interaction between the ion concerned and the ions of the solvent and it will show moreover that simple means are available for determining experimentally the ratio between these separate coefficients.

This problem is most simply attacked by confining ourselves to a consideration of solutions in which the total ion concentration is kept constant so that no change in the primary Milner-effect will confuse the picture of the changing peculiarities. On the other hand a thorough treatment of this problem must include the effect of changing differences at 0.016 *N* concentration. Not too much weight, therefore, can be given to the complete agreement of the low concentration data extrapolated in Table XIX. The above mentioned thermodynamic argument applies of course unvariably in the case of the generalised principles.

¹ Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, 761 (1920).

centration as well. In this respect the chief object will be to represent the peculiarities in such a form that they will vanish uniformly as the concentration approaches zero. This question of the concentration effect will however be reserved for a following publication.

2. The Complex Nature of the Activity Coefficients.

In a recent article¹ a great number of examples showed that equally strong solutions of various uni-univalent salts dissolve slightly soluble metal ammonia salts in largely varying proportions. For instance in the case of oxalotetramine cobaltic tetranitro diammine cobaltiate the following solubilities s were found at 0°:

Solvent	s
0.1 <i>n</i> Na-formate.	0.00128
0.1 <i>n</i> K-formate.	0.00132
0.1 <i>n</i> K-chloride	0.00137
0.1 <i>n</i> K-nitrate.	0.00141

where the first and the last numbers differ about 10 per cent.

The simplest way to account for such diversities would be to ascribe these diversities to a certain dissolving power peculiar to each solvent analogous to what has been assumed in the case of non-electrolytes dissolved in solutions of various salts. It is obvious, however, that conditions as simple as these do not prevail in the case of dissolved ions, because dissolving powers calculated in this way vary pronouncedly from one saturating salt to another.

This is shown by a good many data in the paper quoted above. It also appears clearly from the fact that the solubilities of various sparingly soluble salts are influenced quite

¹ Brønsted and Agnes Petersen. Journ. Amer. Soc. **43**, (1921).

differently by the same solvent as exhibited for instance by the following data for oxalo tetrammine cobaltic tetranitrodiammine cobaltiate (*Ox-N*) and cesium tetrarhodanodiammine chromiate (*Cs-R*) at 20°:

	s_0	s	s/s_0
<i>Ox-N</i>	0.00266	0.00372	1.40
<i>Cs-R</i>	0.00263	0.00323	1.23

s_0 and s here indicating the solubility in pure water and 0.1 *n* KNO_3 respectively. In spite of the nearly identical values of the solubilities of these two salts in water the solubilities in 0.1 KNO_3 -solutions differ largely.

These facts force us to assume certain effects of interaction between the ions in addition to the effect of the dissolving power or salting out effects, peculiar to each salt solution. We must again assume both of these effects to results from isolated causes due to the two ions constituting the solvent salt. We must therefore represent the activity coefficient of a dissolved ion as a product of 4 separate coefficients namely 2 coefficients of interaction and 2 »salting out« coefficients.

In order to give these ideas a mathematical form the following notations will be used:

Activity coefficients in general.....	f
— — of the ion K^+ in general.....	f_K
— — — K^+ in <i>NaCl</i> solution	$f_{K(NaCl)}$
Coefficients of interaction in general.....	f_i
— — — of the ion K^+ influenced	
— — — — by Na^+	$f_{K(Na)}$
— — — K^+ influenced by Cl^- ...	$f_{K(Cl)}$
Salting out coefficients in general.....	f_u
— — — of the ion K^+	$f_{(K)}$

Ratio of activity coefficients in general	r_f
— coefficients of interaction in general	r_i
— salting out coefficients general	r_u

Furthermore we put:

$$\frac{f_{K(NaCl)}}{f_{K(LiCl)}} = r_{K(NaCl/LiCl)}$$

$$\frac{f_{K(Cl)}}{f_{K(NO_3)}} = r_{K(Cl/NO_3)}$$

$$\frac{f_{(K)}}{f_{(Na)}} = r_{(K/Na)}$$

By K , Na and Cl , NO_3 is here meant not only potassium, sodium chloride and nitrate ions but generally various cations and anions respectively.

By means of the above assumption regarding the complex nature of the activity coefficient we can express the activity coefficient for instance for the K -ions as follows:

$$f_{K(NaCl)} = f_{K(Na)} f_{K(Cl)} f_{(Na)} f_{(Cl)} \quad (1)$$

While the coefficient of interaction is determined by the nature of the ions of both the solute and the solvent salt, the salting out coefficients obviously has a more general character, as it depends merely upon the solvent itself.

3. The Principle of the Specific Interaction of Ions.

Various considerations have led the writer to conclude, that the above expression (1) for the activity coefficient of an ion can be largely simplified namely by introducing what we shall call the principle of the specific interaction of ions. This principle may be stated as follows:

In a dilute salt solution of constant total concentration ions will be uniformly influenced by ions of their own sign.

We can therefore write:

$$f_{K(K)} = f_{K(Na)} = f_{Cl(Cl)} = f_{Cl(NO_3)} = k \quad (2)$$

k being a constant depending only upon the concentration. For the present purpose, when we are comparing solutions of the same concentration it can be equated unity. We then obtain the following fundamental equations as a complete statement of our principles:

$$\left. \begin{aligned} f_{K(KCl)} &= f_{K(Cl)} f_{(K)} f_{(Cl)} \\ f_{K(NaCl)} &= f_{K(Cl)} f_{(Na)} f_{(Cl)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

That this simplification is allowable becomes probable from a theoretical point of view when we remember that the individual deviations of salts in dilute solutions are mainly due to secondary electric forces¹ determined by the size and structure of the ions and the number and positions of the separate electric charges of which the net charge is composed. In the case of ions of the same sign the repelling forces will tend to keep them apart and therefore — in dilute solution — to annihilate secondary effects perceptible only when the ions have sufficiently approached one another.

Experimental indications of the validity of the above principles is furnished by some electric measurement² concerning the activity coefficient of the chloride ion in 0.1 n potassium chloride and potassium nitrate solutions. In spite of the chloride dissolving, on an average, about 4 p. ct. less of slightly soluble salts than the nitrate the activity coefficient of Cl^- by means of these measurements was found only 1 p. ct. higher in the chloride than in the nitrate solutions. From this result we draw the inference that the activity coefficient of anions vary very little when passed

¹ Brønsted, Journal Amer. Chem. Soc. **42**, 781 (1920).

² Brønsted, K. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd. **3** Nr. 9 (1920).

from one solution to another having the same cation. These observations allow us to derive the above principle as a probable conclusion.

For fully establishing the principle, however, the most simple and the most direct way would be to utilize solubility data furnished by slightly soluble salts in salts solutions, as solvents. It is the object of the following chapters to present the results achievable from such an examination and to show the conclusions they are leading to for the theory of solutions in general.

4. Introduction of the Theory of the Complex Nature of the Activity Coefficients and of the Principle of the Specific Interaction of Ions in the Theory of Solubility of Salts in Heteroionic Salt Solutions.

In no other field are the individualities of salt solutions more pronouncedly exhibited than in the field of solubility of sparingly soluble salts in solutions of other salts as solvents. According to our theory these individualities are due partly to a peculiar avidity between ions of opposite sign represented by the coefficients of interaction partly to a specific dissolving power exerted by the ions of the solvent and represented by the salting out coefficients.

In order to avoid too much abstraction and complicated notations the principles stated above will be introduced by using, as far as possible, the symbols of well-known salts to represent the various types.

Thus for instance by $AgCl$ and $PbCl_2$ we shall denote uni-univalent and uni-bivalent salts with a common anion, by KCl and KNO_3 , salts having a cation in common etc.

Let s_{AgCl} , P_{AgCl} and Π_{AgCl} stand for solubility, stoichiometric solubility product and thermodynamic solubility

product respectively of $AgCl$ then using for the activity coefficients the notation suggested in the foregoing section we can write in the case of a KNO_3 -solution saturated with $AgCl$:

$$II_{AgCl} = P_{AgCl} f_{Ag(KNO_3)} f_{Cl(KNO_3)} \quad (4)$$

or introducing our principles by means of:

$$\left. \begin{aligned} f_{Ag(KNO_3)} &= f_{Ag(NO_3)} f_{(K)} f_{(NO_3)} \\ f_{Cl(KNO_3)} &= f_{Cl(K)} f_{(K)} f_{(NO_3)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

the following equation:

$$II_{AgCl} = s_{AgCl(KNO_3)}^2 f_{Ag(NO_3)} f_{Cl(K)} f_{(K)}^2 f_{NO_3}^2 \quad (6)$$

In the case of an equally strong $NaNO_3$ -solution as solvent we obtain analogously:

$$II_{AgCl} = s_{AgCl(NaNO_3)}^2 f_{Ag(NO_3)} f_{Cl(Na)} f_{(Na)}^2 f_{(NO_3)}^2 \quad (7)$$

and combining (6) and (7):

$$\frac{s_{AgCl(KNO_3)}}{s_{AgCl(NaNO_3)}} = \left(\frac{f_{Cl(Na)}}{f_{Cl(K)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \quad (8)$$

which by means of (5) can be rewritten as follows:

$$\frac{s_{AgCl(KNO_3)}}{s_{AgCl(NaNO_3)}} = \left(\frac{f_{Cl(NaNO_3)}}{f_{Cl(KNO_3)}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Introducing for the solubility ratio the symbol R and also the r from section 2 by means of

$$\frac{s_{AgCl(KNO_3)}}{s_{AgCl(NaNO_3)}} = R_{AgCl(KNO_3/NaNO_3)} \quad (10)$$

Equations (8) and (9) are transformed into:

$$R_{AgCl(KNO_3/NaNO_3)} = r_{Cl(Na/K)}^{\frac{1}{2}} r_{(Na/K)} \quad (11)$$

$$R_{AgCl(KNO_3/NaNO_3)} = r_{Cl(NaNO_3/KNO_3)}^{\frac{1}{2}} r_{(Na/K)}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Since the coefficients belonging to the Ag^+ and NO_3^- -ions

do not enter into these equations we are obviously justified in making the following deduction that when using as solvents equally strong solutions with an anion in common the solubility ratio shown by a slightly soluble uni-univalent and heteroionic salts depends only on the anion of the saturating salt and the cations of the two solvents. According to this theory we shall therefore find for instance:

$$\frac{S_{AgCl(KNO_3)}}{S_{AgCl(NaNO_3)}} = \frac{S_{AgCl(KClO_3)}}{S_{AgCl(NaClO_3)}} = \frac{S_{TlCl(KNO_3)}}{S_{TlCl(NaNO_3)}}.$$

As an analogous rule it is evident that when the two solvents possess a common cation we can also write:

$$\frac{S_{AgCl(KNO_3)}}{S_{AgCl(KClO_3)}} = \left(\frac{f_{Ag(ClO_3)}}{f_{Ag(NO_3)}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f_{(ClO_3)}}{f_{(NO_3)}} = \left(\frac{f_{Ag(KClO_3)}}{f_{Ag(KNO_3)}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f_{(ClO_3)}}{f_{(NO_3)}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

OR

$$\frac{S_{AgCl(KNO_3)}}{S_{AgCl(KClO_3)}} = \frac{S_{AgCl(NaNO_3)}}{S_{AgCl(NaClO_3)}} = \frac{S_{AgIO_3(KNO_3)}}{S_{AgIO_3(NaNO_3)}}.$$

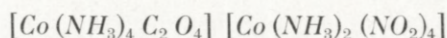
It is not difficult to extend these results to cases in which the saturating salt is of a higher type. If we consider Luteo cobaltic chromate for instance, the symbol of which is $L_2(CrO_4)_3$ (L standing for the Luteo ion $Co(NH_3)_6$) the following equations are obtained:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{L_2(CrO_4)_3(KNO_3)}}{S_{L_2(CrO_4)_3(NaNO_3)}} &= \left(\frac{f_{CrO_4(Na)}}{f_{CrO_4(K)}} \right)^{\frac{3}{5}} \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \\ \frac{S_{L_2(CrO_4)_3(KNO_3)}}{S_{L_2(CrO_4)_3(NaNO_3)}} &= \left(\frac{f_{CrO_4(NaNO_3)}}{f_{CrO_4(KNO_3)}} \right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \right)^{\frac{3}{5}} \\ \frac{S_{L_2(CrO_4)_3(KNO_3)}}{S_{L_2(CrO_4)_3(KCl)}} &= \left(\frac{f_{L(Cl)}}{f_{L(NO_3)}} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{f_{(Cl)}}{f_{(NO)}} \\ \frac{S_{L_2(CrO_4)_3(KNO_3)}}{S_{L_2(CrO_4)_3(KCl)}} &= \left(\frac{f_{L(KCl)}}{f_{L(KNO_3)}} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{f_{(Cl)}}{f_{(NO_3)}} \right)^{\frac{3}{5}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

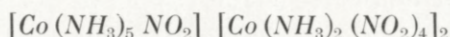
$$\text{or } \left. \begin{aligned} R_{L_2(Cr O_4)_3(KNO_3/Na NO_3)} &= r_{Cr O_4(Na/K)}^{3/2} r_{(Na/K)} \\ R_{L_2(Cr O_4)_3(KNO_3/Na NO_3)} &= r_{Cr O_4(Na NO_3/KNO_3)}^{3/2} r_{(Na/K)}^{3/2} \\ R_{L_2(Cr O_4)_3(KNO_3/K Cl)} &= r_{L(Cl/NO_3)}^{3/2} r_{(Cl/NO_3)} \\ R_{L_2(Cr O_4)_3(KNO_3/K Cl)} &= r_{L(K Cl/KNO_3)}^{3/2} r_{(Cl/NO_3)}^3 \end{aligned} \right\} (14)$$

From the form of these equations we learn that the above rule for uni-univalent saturating salts holds true also when saturating salts of higher types are employed. The solubility ratio is obviously independent of the common ion of the solvents and also of the nature of the ion of opposite sign in the saturating salts as far as saturating salts of the same type are considered. It is very important to note, however, that the form of the equations varies with the type of the saturating salt, as this fact enables us to compute the values of r_i and r_u separately.

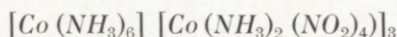
We preferably carry out this calculation by means of a special example applying for instance Equation (14) to the three salts 1. oxalotetrammine cobaltic tetranitrodiammine cobaltiate (OxN):



2. Xantho cobaltic tetranitrodiammine cobaltiate (XN_2):



and 3. Luteo cobaltic tetranitrodiammine cobaltiate (LN_3):



each containing the same univalent anion and a uni-, bi- and trivalent cation respectively. Application of Equation (14) gives in the three cases for the solubility ratio R using KNO_3 and $NaNO_3$ as solvents:

$$R_I = R_{OxN(KNO_3/NaNO_3)} = r_{N(Na/K)}^{1/2} r_{(Na/K)} \quad (15)$$

$$R_{II} = R_{XN_2(KNO_3/NaNO_3)} = r_{N(Na/K)}^{\frac{2}{3}} r_{(Na/K)} \quad (16)$$

$$R_{III} = R_{LN_3(KNO/NaNO_3)} = r_{N(Na/K)}^{\frac{4}{3}} r_{(Na/K)} \quad (17)$$

From two of these equations the ratio of interaction $r_{N(Na/K)}$ and the salting out ratio $r_{(Na/K)}$ can obviously be determined by means of the experimentally found solubility ratios R_I , R_{II} and R_{III} . For the ratio of interaction we obtain:

$$r_i = r_{(Na/K)} = \left(\frac{R_{II}}{R_I}\right)^6 = \left(\frac{R_{III}}{R_I}\right)^4 = \left(\frac{R_{III}}{R_{II}}\right)^{12} \quad (18)$$

and for the salting out ratio:

$$r_u = r_{(Na/K)} = \frac{R_I^4}{R_{II}^3} = \frac{R_I^3}{R_{III}^2} = \frac{R_{II}^9}{R_{III}^3} \quad (19)$$

showing the ratios R_I , R_{II} and R_{III} to be correlated also.

According to Equation (3) the ratio of the two activity coefficients $r_f = \frac{f_{N(NaNO_3)}}{f_{N(KNO_3)}}$ is given by

$$r_f = r_i r_u \quad (19a)$$

and is thus determinable from the same solubility ratios.

Corresponding results are easily obtained when other types of saturating salts are considered.

By these equations our principles have been given such a form that they can be subjected to a direct experimental test.

It may be expected, perhaps, that the r_u -value derivable by means of (19) or analogous equations should obtain also in the case of non-electrolytes as saturating substances here representing directly the solubility ratio. This would indeed be the case if no interaction between ions and neutral molecules occurred. According to H. v. EULER¹ neutral

¹ Zeitschr. f. phys. Ch. **31**, 360 (1899), Zeitschr. f. Electrochemie **23**, 192 (1917).

substances in many cases exhibit the same solubility ratio in two solvents, a fact which is found consistent with the above assumption. Further inquiry in this field, however, shows deviations to exist, which in certain cases are very considerable, and we are therefore necessitated to assume a kind of interaction between ions and neutral molecules too. This however is generally slight, compared with the action between ions of opposite sign.

When utilizing argon or an other inert gas as saturating substance a peculiar interaction would probably be precluded, and we should therefore expect the ratio of solubility of such a substance in two solutions to be identical with the r_u for these solvents found in the described way.

5. Experiments Covering Solubilities in Heteroionic Solvents.

a) Experiments of minor accuracy. Most of the experimental material referred to in this section was produced for other purposes than that of verifying the above principles, and it is but moderately accurate.

In the first place experiments were available concerning some xantho cobaltic and chloropentammine cobaltic salts namely:

Xantho-cobaltic tetrarhodano diamminechromiate..	($X R_2$)
— — nitro — cobaltiate ..	($X N_2$)
Chloropentammine cobaltic tetrarhodano diammine chromiate.....	($P R_2$)
Chloropentammine cobaltic tetranitro diammine cobaltiate	($P N_2$)

using uni-univalent salt solutions as solvents. The results are given in Tabela I and II.

Table I. Solubility of XR_2 and XN_2 in 0.2 Molal Salt Solutions at 0° and 20° .

Solvent	$XR_2, t = 0^\circ$	$XR_2, t = 20^\circ$	$XN_2, t = 0^\circ$	$XN_2, t = 20^\circ$
H_2O	0.000392	0.001284	0.000311	0.000992
$Na CHO_2$	629	1950	570	1692
$K CHO_2$.	667	2040	629	1824
$Na Cl$. . .	680	2097	621	1823
$K Cl$	723	2193	682	1952
$Na NO_3$.	746	2228
$K NO_3$. .	790	2325

Table II. Solubility of PR_2 and PN_2 in 0.2 Molal Salt Solutions at 0° and 20° .

Solvent	$PR_2, t = 0^\circ$	$PR_2, t = 20^\circ$	$PH_2, t = 0^\circ$	$PN_2, t = 20^\circ$
H_2O	0.001731	0.000637
$Na CHO_2$	0.000477	0.001516	325	1100
$KC HO_2$.	510	1592	363	1207
$Na Cl$. . .	524	1627	353	1187
$K Cl$	548	1702	393	1291

By means of these figures the solubility ratios have been calculated and are collected in Table III.

Table III. Ratios of Solubility of XR_2 , XN_2 , PR_2 , and PN_2 , in Various 0.2 Molal Solvents.

Solvent	$t = 0^\circ$		$t = 20^\circ$	
	XR_2	PR_2	XR_2	PR_2
$KCHO_2/Na CHO_3$.	1.060	1.069	1.046	10.50
$K Cl/Na Cl$	1.063	1.046	1.046	1.046
$KNO_3/Na NO_3$. . .	1.059	..	1.044	...
K^+/Na^+ mean . . .	1.059		1.046	

Solvent	t = 0°		t = 20°	
	XN ₂	PN ₂	XN ₂	PN ₂
<i>K CHO</i> ₂ / <i>Na CHO</i> ₂	1.103	1.119	1.078	1.099
<i>K Cl</i> / <i>Na Cl</i>	1.098	1.115	1.071	1.088
<i>K</i> ⁺ / <i>Na</i> ⁺ mean	1.109		1.084	
	XR ₂	XN ₂	XR ₂	XN ₂
<i>Na Cl</i> / <i>Na CHO</i> ₂ . . .	1.081	1.090	1.076	1.077
<i>K Cl</i> / <i>K CHO</i> ₂	1.083	1.087	1.075	1.070
<i>Cl</i> ⁻ / <i>CHO</i> ₂ ⁻ mean	1.085		1.075	
	XR ₂		XR ₂	
<i>Na NO</i> ₃ / <i>Na CHO</i> ₂ . .	1.186		1.143	
<i>K NO</i> ₃ / <i>K CHO</i> ₂	1.183		1.140	
<i>NO</i> ₃ ⁻ / <i>CHO</i> ₂ ⁻ mean	1.184		1.142	
	PR ₂	PN ₂	PR ₂	PN ₂
<i>Na Cl</i> / <i>K CHO</i> ₂	1.098	1.086	1.073	1.079
<i>K Cl</i> / <i>K CHO</i> ₂	1.074	1.084	1.071	1.070
<i>Cl</i> ⁻ / <i>CHO</i> ₂ ⁻ mean	1.086		1.073	

The figures in this table furnish a good verification of the principle of the specific interaction of the ions. The agreement of the figures within each group in the tables shows that the action between ions of the same sign hardly surmounts the possible experimental error. The results may be stated in the following way by means of Equation (14):

Table IV.

	t = 0°	t = 20°
$r_{R(Na/K)}^{Na/K}$ $r_{(Na/K)}$	1.059	1.046
$r_{N(Na/K)}^{Na/K}$ $r_{(Na/K)}$	1.109	1.084
$r_{X(HCOO/Cl)}^{HCOO/Cl}$ $r_{(HCOO/Cl)}$	1.085	1.075
$r_{X(HCOO/NO_3)}^{HCOO/NO_3}$ $r_{(HCOO/NO_3)}$	1.184	1.142
$r_{P(HCOO/Cl)}^{HCOO/Cl}$ $r_{(HCOO/Cl)}$	1.086	1.073

These figures show that the coefficients of interactions may differ very markedly from one another. The relative action of Na^+ and K^+ is thus seen to be about 7 p. ct. higher for the N^- than for the R^- -ion. The r -coefficients themselves can not be calculated from these figures since salts of only one single type are employed as saturating salts. With rise of the temperature the peculiarity diminishes and the ratios approach unity.

In the following tables are given the results of some further experiments covering cesium tetrarhodano diammine chromiate and cesium tetranitro diammine cobaltiate in various solvents.

Table V. Solubility of CsR and CsN in Various Solvents at 0° .

Solvent	CsR	CsN
H_2O	0.000789	0.00532
$NaCHO_2$, 1 mol. . . .	831	785
$NaNO_3$, 1 mol	1365	1268
$Mg(NO_3)_2$, 0,5 mol.	1356	1113
$MgSO_4$, 0,5 mol. . . .	973	815

Table VI. Ratios of Solubility of CsR and CsN in Various Solvents at 0° .

Solvent	CsR	CsN	Mean
$NaNO_3/NaCHO_2$	1.64	1.62	1.63
$Mg(NO_3)_2/MgSO_4$	1.39	1.37	1.38
$NaNO_3/Mg(NO_3)_2$	1.01	1.14	...

The agreement found here between the ratios in solvents with a common cation and the disagreement between the ratios in solvents with a common anion verifies closely the rule of the specific action of the ions and the ab-

sence of any action between ions of the same sign. This is the more remarkable as in this case the increase in solubility is very high on account of the high concentration of the solvents employed.

The results of a series of measurements covering the four salts *Cs* tetrarhodano chromiate (*CsR*), *Co*-tetranitrocobaltiate (*CsN*) and the corresponding oxalotetramine cobaltic salts (*OxR* and *OxN*) in which nitrates and chlorides of potassium and sodium were employed as solvents, are tabulated below.

Table VII. Solubility of *CsN*, *OxN*, *CsR* and *OxR* in 0.1 Salt Solutions at 20°

Solvent	<i>CsN</i>	<i>OxN</i>	<i>CsR</i>	<i>OxR</i>
H_2O	0.01713	0.002659	0.002629	0.001366
0.1 KNO_3 . . .	2092	3723	3233	1813
0.1 $NaNO_3$. . .	2055	3615	3182	1786
0.1 KCl	2021	3647	3110	1771
0.1 $NaCl$	1987	3531	3072	1737

Table VIII. Solubility Ratios of *CsN*, *CsR*, *OxN* and *OxR* in 0.1 Mol. Solutions of Alkali Nitrates and Chlorides and Water at 20°.

Solvent	<i>CsN</i>	<i>OxN</i>	<i>CsR</i>	<i>OxR</i>
0.1 KNO_3 . . .	1.222	1.400	1.230	1.327
0.1 $NaNO_3$. . .	1.200	1.360	1.210	1.307
0.1 KCl	1.180	1.372	1.183	1.296
0.1 $NaCl$	1.162	1.328	1.168	1.271

Table IX. Solubility Ratios of *CsN*, *OxN*, *CsR* and *OxR* in alkali Nitrates and Chlorides at 20°.

Solvents	<i>CsN</i>	<i>CsR</i>	
KNO_3/KCl . . .	1.036	1.040	} $r_{Cs(Cl/NO_3)}^{1/2} r_{Cl/NO_3} = 1.036$
$NaNO_3/NaCl$. . .	1.033	1.036	

Solvents	<i>OxN</i>	<i>OxR</i>	
KNO_3/KCl . .	1.021	1.024	} $r_{Ox(Cl/NO_3)}^{1/2} r_{(Cl/NO_3)} = 1.024$
$NaNO_3/NaCl$	1.024	1.028	
	<i>CsN</i>	<i>OxN</i>	
$KNO_3/NaNO_3$	(1.018)	1.030	} $r_{N(Na/K)}^{1/2} r_{(Na/K)} = 1.030$
$KCl/NaCl$. . .	(1.016)	1.030	
	<i>CsR</i>	<i>OxR</i>	
$KNO_3/NaNO_3$	1.017	1.015	} $r_{R(Na/K)}^{1/2} r_{(Na/K)} = 1.016$
$KCl/NaCl$. . .	1.013	1.019	

The two figures in brackets are evidently too low, perhaps due to the fact that the solid *CsN* takes up some *KN* from the solution to form a solid mixture. Such a behaviour may be expected because the crystals are very similar, certainly isomorphic and the solubility of the same order of magnitude. This, however, will not interfere with the other values if, as we must assume, KNO_3 and *KCl* behave uniformly. In the case of the corresponding tetra-rhodano chromiates an analogous phenomenon is precluded by the widely differing solubilities of the potassium and caesium salt of this anion¹.

Otherwise, as shown by table X the agreement between the figures in each group justifies the conclusion that also in this case we have a good verification of the principles to be tested.

Finally we may add the results of some measurement with praseo salts.

As the purity of these salts could not be tested in the usual way on account of their instability the data in question are of minor value. Still a conclusion confirmatory to

¹ Later experiments have shown that a similar effect is still perceptible in this system. The ratios 1.017 and 1.013 in Table IX are therefore certainly somewhat too low.

our principle may be drawn from them. Pi^- indicates the picrate ion and Rh^- the thiocyanate ion.

Table X. Solubility of Praseo Salts in Various Solvents at $t = 0^\circ$

Solvent	$Pr Rh$	$Pr NO_3$	$Pr JO_3$	$Pr Pi$
0.1 KCl	0.00358	0.00500	0.00571	0.000295
0.1 $NaCl$. . .	353	4835	568	2855
0.1 $KClO_3$. .	3645	...	579	...
0.1 $NaClO_3$.	3605	...	576	...
0.05 KCl . . .	0.003355	0.00458	0.00525	0.000274
0.05 $NaCl$. . .	332	451	524	266
0.05 $KClO_3$. .	339	...	531	...
0.05 $NaClO_3$	337	...	528	...
H_2O	0.00282	0.00386	0.00441	0.00212

Table XI. Ratios of Solubility of Praseo Salts in 0.1 Molal Alkali Chlorides and Chlorates at 0° .

Solvents	$Pr Rh$	$Pr JO_3$	
$KClO_3/KCl$	1.017	1.013	} $r_{Pr(Cl/ClO_3)}^{1/2} r_{(Cl/ClO_3)} = 1.016$
$NaClO_3/NaCl$	1.021	1.013	
	$Pr Rh$		
$KCl/NaCl$	1.014		} $r_{Rh(Na/K)}^{1/2} r_{(Na/K)} = 1.011$
$KClO_3/NaClO_3$. . .	1.008		
	$Pr JO_3$		
$KCl/NaCl$	1.005		} $r_{JO_3(Na/K)}^{1/2} r_{(Na/K)} = 1.005$
$KClO_3/NaClO_3$. . .	1.005		

The very slight difference found between the solubility of $PrJO_3$ in K - and Na -solvents agrees with the fact that solutions of potassium and sodium iodates are materially

alike in respect to their osmotic properties as shown by Jahn¹ and Hall and Harkins². The relation here referred to between osmotic coefficients and activity is derived on the basis of our principle in section 8.

b. Experiments of higher accuracy. A series of experiments is begun in this laboratory for the purpose of securing very accurate data for verifying our principles. All these data will be reserved for a special publication. Only a few results may be stated here in order to show the accuracy obtainable and the exactness with which our principles hold.

0.1 *N* solutions of potassium and sodium nitrate served as solvents: The saturating salts contained the univalent tetranitro cobaltate anion $Co(NH_3)_2(NO_2)_4^-$. The cations and the corresponding solubility ratios are given in the following table.

Table XII. Solubility Ratios s_{KNO_3}/s_{NaNO_3} of Various Tetranitrodiammine Cobaltates at 20°.

Cation	s_{KNO_3}/s_{NaNO_3}
Oxalo tetrammine cobaltic.....	1.0339
Silver	1.0343
Tetramethyl-ammonium	1.0340
Carbonato-tetrammine cobaltic	1.0324
	$R_I = 1.0339$
Chloropentammine cobaltic	1.0411
Xantho cobaltic	1.0414
	$R_{II} = 1.0413$
Triethylene diammine cobaltic	1.0450
Aquo pentammine cobaltic.....	1.0465
	$R_{III} = 1.0458$

¹ Z. physik. Chem. **59**, 37 (1907).

² Journ. Amer. Chem. Soc. **38**, 2669 (1916).

By means of Equations (15)—(17) we can compute the R when introducing $r_i = 1.0476$ and $r_u = 1.0101$. The R -values thus calculated are given in Table XIII together with those found.

Table XIII.

	R found	R calculated
R_I	1.0339	1.0339
R_{II}	1.0413	1.0419
R_{III} . . .	1.0459	1.0460

The agreement leaves nothing to be desired.

6. Application of the Theory to Solutions in Homoionic Solvents.

The solubility of a uni-univalent salt in a homoionic salt solution is determined by

$$\Pi_{AgCl} = P_{AgCl(KCl)} f_{Ag(K)} f_{Ag(Cl)} f_{Cl(K)} f_{Cl(Cl)} f_{(K)}^2 f_{(Cl)}^2 \quad (20)$$

where the same notation is used as in section 3. Introducing the principles of the specific interaction we can write

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{AgCl} &= P_{AgCl(KCl)} f_{Ag(Cl)} f_{Cl(K)} f_{(K)}^2 f_{(Cl)}^2 \\ \Pi_{AgCl} &= P_{AgCl(NaCl)} f_{Ag(Cl)} f_{Cl(Na)} f_{(Na)}^2 f_{(Cl)}^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

and therefore

$$\left(\frac{P_{AgCl(KCl)}}{P_{AgCl(NaCl)}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{f_{Cl(Na)}}{f_{Cl(K)}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \quad (22)$$

Putting

$$\left(\frac{P_{AgCl(KCl)}}{P_{AgCl(NaCl)}} \right)^{\frac{1}{2}} = R_{AgCl(KCl/NaCl)} \quad (23)$$

and introducing the same coefficients as in the foregoing section we obtain:

$$R_{AgCl(KCl/NaCl)} = r_{Cl(Na/K)}^{\frac{1}{2}} r_{(Na/K)} r_{Cl(NaCl/KCl)}^{\frac{1}{2}} r_{(Na/K)}^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

in full analogy to the corresponding equation (12) in the case of heteroionic solvents.

If the saturating salt has the composition $L_2(CrO_4)_3$ and is dissolved in the two solvents K_2CrO_4 and Na_2CrO_4 the following equation is obtained

$$\left(\frac{P_{L_2(CrO_4)_3(K_2CrO_4)}}{P_{L_2(CrO_4)_3(Na_2CrO_4)}} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{f_{CrO_4(Na)}}{f_{CrO_4(K)}} \right)^{\frac{3}{5}} \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \quad (25)$$

or

$$\left. \begin{aligned} R_{L_2(CrO_4)_3(K_2CrO_4/Na_2CrO_4)} &= r_{CrO_4(Na/K)}^{\frac{3}{5}} r_{(Na/K)} = \\ &= r_{CrO_4(Na_2CrO_4/K_2CrO_4)}^{\frac{3}{5}} r_{(Na/K)}^{\frac{3}{5}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

also fully analogous to the corresponding equation (14).

The ratios of interaction and the salting out ratios are of course determinable from Equations (25)–(26) in just the same way as from Equations (13) and (14) in the case of heteroionic solvents. Equations (15)–(19) are therefore also valid for homoionic solvents, the only difference being that when heteroionic solvents are used R represents directly the solubility ratio while in the case of homoionic solvents as stated above it means the n^{th} root of the ratio of solubility products, n being the total number of ions contained in one molecule of the saturating salt. As in Equations (22)–(26) all coefficients belong to the ions of the solvent itself dissolution of homoionic solutes leads directly to a determination of the interaction of ions in the salt solutions employed as solvents.

7. Experiments Covering Solubilities in Homoionic Solvents.

In order to examine the theoretical results reached in the foregoing section a series of measurements was carried out with cobalt ammonia salts dissolved in homoionic solvents. The saturating salts employed contained the follow-

ing complex ions: oxalo-tetrammine cobaltic (*Ox*): $[Co(NH_3)_4 C_2O_4]^+$, chloropentammine cobaltic (*[Cl]*): $[Co(NH_3)_5 Cl]^{++}$, bromo-pentammine cobaltic (*[Br]*) $[Co(NH_3)_5 Br]^{++}$, luteo cobaltic (*L*) $[Co(NH_3)_6]^{+++}$, oxalo dinitro diammine cobaltate ion (*On*) $[Co(NH_3)_2(NO_2)_2 C_2O_4]^-$, and the solvents were 0.1 molal solutions of KNO_3 , $NaNO_3$, KCl and $NaCl$. The temperature of the experiment was 0° and the same method was used as stated in the earlier communication. The result of the measurements are given in the following tables.

Table XIV. Solubility of Nitrates in KNO_3 - and $NaNO_3$ -Solutions at 0° .

Saturating Salt	0.1 KNO_3	0.1 $NaNO_3$	P_{KNO_3}/P_{NaNO_3}	<i>R</i>
<i>Ox</i> NO_3	0.000816	0.000777	1.051	1.025
<i>[Cl]</i> $(NO_3)_2$. . .	0.00397	0.00367	1.092	1.030
<i>L</i> $(NO_3)_3$	0.00493	0.00450	1.131	1.031

Table XV. Solubility of Chlorides in KCl - and $NaCl$ -Solutions at 0° .

Saturating Salt	0.1 KCl	0.1 $NaCl$	P_{KCl}/P_{NaCl}	<i>R</i>
<i>Ox</i> Cl	0.00581	0.00570	1.020	1.010
<i>[Cl]</i> Cl_2	0.000610	0.000593	1.029	1.010
<i>[Br]</i> Cl_2	0.000220	0.000213	1.033	1.008

Table XVI. Solubility of *KOn* in KNO_3 and KCl -Solutions at 0° .

	0.1 KNO_3	0.1 KCl	P_{KNO_3}/P_{KCl}	<i>R</i>
<i>KOn</i>	0.00380	0.00351	1.086	1.042

Table XVII. Solubility of *NaOn* in $NaNO_3$ and $NaCl$ -Solutions at 0° .

	0.1 $NaNO_3$	0.1 $NaCl$	P_{NaNO_3}/P_{NaCl}	<i>R</i>
<i>NaOn</i>	0.00972	0.00928	1.051	1.025

R denotes — as explained p. 25 — the n^{th} root of the ratio of solubility products n being the number of ions of each salt. In order to calculate the ratios of interaction and the salting out ratios from these data we use Equations (18) and (19) shown to be valid in the case of homoionic solvents also, R_I , R_{II} , and R_{III} corresponding to biionic, triionic and tetraionic solutes respectively.

1. Calculation of the ratio of interaction and the salting out ratio for 0.1 molal KNO_3 and $NaNO_3$ solutions. We have found (Table XIV)

$$R_I \dots = 1.025$$

$$R_{II} \dots = 1.030$$

$$R_{III} \dots = 1.031$$

Introducing these values in (18) and (19):

$$r_i = r_{NO_3(Na/K)} = \left(\frac{R_{II}}{R_I}\right)^6 = \left(\frac{R_{III}}{R_I}\right)^4$$

and

$$r_u = r_{(Na/K)} = \frac{R_I^4}{R_{II}^3} = \frac{R_I^3}{R_{III}^2}$$

we obtain as the most fitting values of r_i and r_u

$$r_i = 1.028$$

$$r_u = 1.011$$

Again inserting these values in Equation (20), (21) and (22) we calculate the R -values tabulated below together with the experimental values of R .

Table XVIII. Comparison of R -values for KNO_3 and $NaNO_3$ solutions.

	Found	Calcul.
$R_I \dots$	1.025	1.025
$R_{II} \dots$	1.030	1.030
$R_{III} \dots$	1.031	1.032

showing that the adopted values of r_i and r_u agrees excellently with the experiment.

2. Calculation of the ratio of interaction and the salting out ratio for 0.1 molal solutions of *KCl* and *NaCl*. The calculation is carried out quite similarly. Introducing the most fitting values:

$$r_i = r_{Cl(Na/K)} = 1.000$$

$$r_u = r_{(Na/K)} = 1.010$$

we obtain the figures in Table XIX.

Table XIX. Comparison of *R*-values for *KCl* and *NaCl*-Solutions.

	Found	Calcul.
R_I	1.010	1.010
R_{II}	1.009	1.010

The figures for R_{II} , 1.009 is taken as the mean of the values 1.010 and 1.008 for $[Cl]Cl_2$ and $[Br]Cl_2$ respectively. On account of the higher solubility of $[Cl]Cl_2$ the corresponding R_{II} -value is certainly more accurate with this salt and considering this fact the agreement between *R*-values found and calculated becomes complete.

3. Significance of the above agreement. The above calculations led to two independent determinations of $r_u = r_{(Na/K)}$ at 0° namely:

$$r_{(Na/K)} = 1.011$$

$$r_{(Na/K)} = 1.010$$

using nitrates and chlorides respectively as solvents. In the previous section the same value 1.010 was found at 20° by means of tetranitro-diammine cobaltiate dissolved

in alkali nitrates solutions. We find thus through these measurements that the sodium ion has a salting out effect about 1.0 p. ct. larger than the potassium ion at 0.1 N solution. It is very desirable to test the scope of the present theory by further examinations in the same direction using as solvents various salt solutions with a common ion and salts of various types as solutes. It is interesting to note, that the salting out effect of 0.1 N solutions of *K*- and *Na*-ion towards non-electrolytes differ in several cases by about the same amount. However, as explained in the foregoing by using non-electrolytes as saturating substances we can not assume the $r_{(Na/K)}$ to be precisely determined.

For the ratio of interaction we found:

$$\begin{aligned} r_{NO_3(Na/K)} &= 1.028 \\ r_{Cl(Na/K)} &= 1.000 \end{aligned}$$

While the chlorine ion is acted upon equally by *K*- and *Na*-ions we see the nitrate ion to have an almost 3 p. ct. higher avidity for K^+ than for Na^+ .

The ratio of activity coefficients can now be calculated by means of Equation (19a)

$$r_f = r_i r_u$$

yielding for the activity ratio of the nitrate ion

$$r_{NO_3(NaNO_3/KNO_3)} = 1.028 \cdot 1.011 = 1.039$$

while for the chlorine ion correspondingly:

$$r_{Cl(NaCl/KCl)} = 1.000 \cdot 1.011 = 1.011.$$

The activity coefficient of the nitrate ion is thus about 4 p. ct. higher in a 0.1 N solution of $NaNO_3$ than in a KNO_3 -solution of the same concentration, while in the case of the chlorides the corresponding figure for the chlorine ion is about 1 p. ct.

8. Inter-Relation between Activity and Osmotic Coefficients and between Solubility and Freezing Point.

Already in the first paper quoted above an interdependency between solubility and freezing point was suspected based on the fact that solvents having a small freezing point lowering generally proved of high dissolving power towards slightly soluble salts and vice versa. A simple relation, however, could not be found, because the ratio of dissolving power of two solvents vary with the nature of the saturating salt. This question is readily solved by introducing the principle of the specific interaction of ions in connection with a general thermodynamic treatment of the relation between activity and osmotic coefficients in a mixed solution of constant total concentration.

The general relation¹

$$\sum c_1 d \ln \xi_1 = d\eta \quad (27)$$

where c_1 and ξ_1 stand for the concentration and the activity of the first ion, η for the osmotic concentration, and $\sum c_1 = c$ is the total ion concentration, forms a basis for such treatment.

Introducing in this equation $\xi_1 = c_1 f_1$ and $\eta = c\varphi$ and assuming c to be constant we obtain

$$\sum c_1 d \ln c_1 + \sum c_1 d \ln f_1 = cd\varphi \quad (28)$$

or

$$\sum c_1 d \ln f_1 = cd\varphi \quad (29)$$

If we now consider a mixed solution of *KCl* and *NaCl* in which $\frac{c_{NaCl}}{c_{KCl}} = \frac{x}{1-x}$ we can write:

$$c_{NaCl} = \frac{c}{2}x,$$

¹ Brønsted. Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, (761) 1920.

$$c_{KCl} = \frac{c}{2} (1-x),$$

$$c_{Cl} = \frac{c}{2}$$

and thus

$$x \, d \ln f_{Na} + (1-x) \, d \ln f_K + d \ln f_{Cl} = 2d\varphi \quad (30)$$

by which the activity coefficient of the ions in the mixed solutions are thermodynamically correlated to the osmotic coefficient.

We shall now introduce the principle of the specific interaction of ions. Since, according to this, the coefficients of interaction of the cations are unchanged when the solution gradually changes from a KCl to a $NaCl$ -solution because the only interacting ion Cl^- is present in constant concentration, the change in f_K and f_{Na} is due to the changing salting out effect alone. We, therefore, can put

$$d \ln f_K = d \ln f_{Na} = d \ln f_u \quad (31)$$

and

$$d \ln f_u + d \ln f_{Cl} = 2d\varphi \quad (32)$$

or in integrated form

$$\varphi_{NaCl} - \varphi_{KCl} = \frac{1}{2} \ln \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} + \frac{1}{2} \ln \frac{f_{Cl(NaCl)}}{f_{Cl(KCl)}} \quad (33)$$

or by means of (5)

$$\varphi_{NaCl} - \varphi_{KCl} = \frac{1}{2} \ln \frac{f_{Cl(Na)}}{f_{Cl(K)}} + \ln \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}}. \quad (34)$$

These equations can also be written:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{NaCl} - \varphi_{KCl} &= \ln [r_{Cl(Na/K)}^{\frac{1}{2}} r_{(Na/K)}] = \\ &= \frac{1}{2} \ln [r_{Cl(NaCl/KCl)} r_{(Na/K)}] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

In the more general case of the two salts $Al_2(SO_4)_3$ and $Fe_2(SO_4)_3$ we obtain by quite similar calculations:

$$2d\ln f_u + 3d\ln f_{SO_4} = 5d\varphi \quad (36)$$

$$\text{or } \varphi_{Al_2(SO_4)_3} - \varphi_{Fe_2(SO_4)_3} = \frac{3}{5} \ln \frac{f_{SO_4(Al_2(SO_4)_3)}}{f_{SO_4(Fe_2(SO_4)_3)}} + \frac{2}{5} \ln \frac{f_{(Al)}}{f_{(Fe)}} \quad (37)$$

$$\text{and } \varphi_{Al_2(SO_4)_3} - \varphi_{Fe_2(SO_4)_3} = \frac{3}{5} \ln \frac{f_{SO_4(Al)}}{f_{SO_4(Fe)}} + \ln \frac{f_{(Al)}}{f_{(Fe)}} \quad (38)$$

yielding for instance for $MgCl_2$ and $CaCl_2$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{MgCl_2} - \varphi_{CaCl_2} &= \frac{2}{3} \ln \frac{f_{Cl(MgCl_2)}}{f_{Cl(CaCl_2)}} + \frac{1}{3} \ln \frac{f_{(Mg)}}{f_{(Cl)}} = \\ &= \frac{2}{3} \ln \frac{f_{Cl(Mg)}}{f_{Cl(Ca)}} + \ln \frac{f_{(Mg)}}{f_{(Ca)}} \end{aligned} \right\} (39)$$

and for K_2SO_4 and Na_2SO_4

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{Na_2SO_4} - \varphi_{K_2SO_4} &= \frac{1}{3} \ln \frac{f_{SO_4(Na_2SO_4)}}{f_{SO_4(K_2SO_4)}} + \frac{2}{3} \ln \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} = \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{f_{SO_4(Na)}}{f_{SO_4(K)}} + \ln \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \end{aligned} \right\} (40)$$

A relation between solubility and osmotic coefficients of the solvents is now easily arrived at by writing Equation (22) as follows:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{P_{AgCl(KCl)}}{P_{AgCl(NaCl)}} = \frac{1}{2} \ln \frac{f_{Cl(Na)}}{f_{Cl(K)}} + \ln \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \quad (41)$$

which by comparison with (34) gives:

$$\varphi_{NaCl} - \varphi_{KCl} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{AgCl(KCl)}}{P_{AgCl(NaCl)}} \quad (42)$$

The corresponding relation for the more general case of $L_2(SO_4)_3$ dissolved in $Al_2(SO_4)_3$ and $Fe_2(SO_4)_3$ solutions is

$$\varphi_{Al_2(SO_4)_3} - \varphi_{Fe_2(SO_4)_3} = \frac{1}{5} \ln \frac{P_{L_2(SO_4)_3, Fe_2(SO_4)_3}}{P_{L_2(SO_4)_3, Al_2(SO_4)_3}} \quad (43)$$

The difference in osmotic coefficients, and therefore in freezing points, of two solutions with a common ion, is

thus computable from the solubility ratio of sparingly soluble salts possessing also the common ion of the solvents. And vice versa, solubility ratios can be calculated from freezing point measurements.

In a quite similar way solubility measurements in heteroionic solvents are utilizable for the same purpose. According to Equation (8) and (44)

$$\ln \frac{s_{AgCl(KNO_3)}}{s_{AgCl(NaNO_3)}} = \frac{1}{2} \ln \frac{f_{Cl(Na)}}{f_{Cl(K)}} + \ln \frac{f_{(Na)}}{f_{(K)}} \quad (44)$$

and

$$\ln \frac{s_{L_2(CrO_4)_3(Fe_2(SO_4)_3)}}{s_{L_2(CrO_4)_3(Al_2(SO_4)_3)}} = \frac{3}{5} \ln \frac{f_{CrO_4(Al)}}{f_{CrO_4(Fe)}} + \ln \frac{f_{(Al)}}{f_{(Fe)}} \quad (45)$$

and thus

$$\ln \frac{s_{AgCl(KNO_3)}}{s_{AgCl(NaNO_3)}} = \varphi_{NaCl} - \varphi_{KCl} \quad (46)$$

and

$$\ln \frac{s_{L_2(CrO_4)_3(Fe_2(SO_4)_3)}}{s_{L_2(CrO_4)_3(Al_2(SO_4)_3)}} = \varphi_{Al_2(CrO_4)_3} - \varphi_{Fe_2(CrO_4)_3} \quad (47)$$

Equation (42) can be tested by means of the solubility data from Tables (14)—(17) and available data of the freezing point lowerings of alkali nitrates and chlorides taken from the critical study of NOYES and FALK. The figures are collected in Table XX.

Table XX. Comparison of Freezing Point and Solubility Data.

Salt ₁	Salt ₂	$A_1 - A_2$	$\varphi_1 - \varphi_2$	P_2/P_1	$\frac{1}{2} \ln P_2/P_1$
$NaNO_3$	KNO_3	0.090	0.024	1.051	0.025
$NaCl$	KCl	0.027	0.008	1.020	0.010
KCl	KNO_3	0.148	0.039	1.086	0.041
$NaCl$	$NaNO_3$	0.085	0.023	1.051	0.025

According to Equation (42) we have:

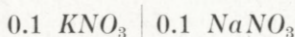
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

The figures in the 2nd and 4th column show this relation to be fulfilled very exactly and thus lends strong support to the theory on which these calculations are based.

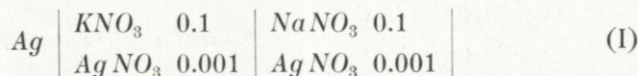
9. Determination of the Liquid-Junction Potential on the Basis of our Principles.

The principles established in the preceding sections can clearly be utilized for estimating the liquid-junction potential in a galvanic cell.

If we want to determine the potential at the liquid junction:



we add a little AgNO_3 and measure the cell:



the electromotive force of which is given by:

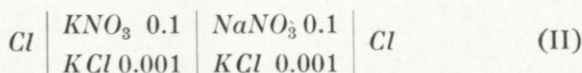
$$\pi_1 = RT \ln \frac{f_{\text{Ag}(\text{NaNO}_3)}}{f_{\text{Ag}(\text{KNO}_3)}} + \pi_d \quad (48)$$

or according to our principles:

$$\pi_1 = RT \ln r_{(\text{Na/K})} + \pi_d. \quad (49)$$

Since $r_{(\text{Na/K})}$, as shown, is determinable from solubility measurements we are in a position to calculate π_d from the electromotive force of the cell found.

Adding a little chloride to the two nitrate solutions we can build the following cell



yielding the electromotive force

$$\pi_2 = RT \ln \frac{f_{Cl(KNO_3)}}{f_{Cl(NaNO_3)}} + \pi_d$$

$$\text{or } \pi_2 = -RT \ln [r_{(Na/K)} r_{Cl(Na/K)}] + \pi_d \quad (50)$$

equally usable for estimation of π_d

Combining (49) and (50) we obtain

$$\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = RT \ln [r_{Cl(Na/K)}^{\frac{1}{2}} r_{(Na/K)}] \quad (51)$$

or by introduction of (11):

$$\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = RT \ln \frac{s_{AgCl(KNO_3)}}{s_{AgCl(NaNO_3)}} \quad (52)$$

showing an important relation to hold between solubility and electromotive force.

It is obvious that when r_u has been determined from solubility measurements and, therefore, π_d is computable by means of Equation (49) from measurements of the cell (I) then Equation (49) can be generally utilized for the determination of r_i , the ratios of interaction, inserting in the solutions various electrodes and adding small amounts of the corresponding salts.

Since for $r_{(Na/K)}$ the value 1.010 has been found above the liquid function potential in a cell like (I) containing potassium and sodium associated with the same anion is given by

$$\pi_d = \pi_1 - 0.00025 \text{ volt}$$

at 20°. The two π are here reckoned in the direction from K^+ to Na^+ -solution.

Summary.

1. The activity coefficient of an ion is determined by two factors one of which is due to the salting out effect of the salt solutions serving as solvent and the other to electrical interaction between the said ions and the ions of the solvent.

2. Ions are uniformly influenced by ions of their own sign. Their activity coefficients depend, therefore, only upon the action of ions of opposite sign and the salting out effect of the solvent.

3. The salting out effect of a salt solution can be represented as a product of the salting out effects of the separate ions.

4. Simple relations regarding solubility in salt solutions at constant concentration are derived.

5. Methods for determining the ratios of salting out coefficients, coefficients of interaction and activity coefficients are given.

6. A thermodynamic relation between activity coefficients and osmotic coefficients in solutions of constant total concentration, and a relation between solubility and freezing point are derived.

7. A method for estimating liquid-junction potentials is found.

8. The theoretical conclusions in the paper are experimentally verified.

Den polytekniske Lærestalts fysisk-kemiske Laboratorium.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

1. BIND (Kr. 8,80):

Kr. Ø.

1. CHRISTIANSEN, C.: Experimentalundersøgelser over Gnidnings- elektricitetens Oprindelse. VI. 1917	0.25
2. KNUDSEN, MARTIN: Fordampning fra Krystaloverflader. 1917.	0.25
3. BRØNSTED, J. N., og PETERSEN, AGNES: Undersøgelser over Om- dannelsen af reciproke Saltpar, samt over Benzidin-Benzidinsulfat- Ligevægten. Affinitetsstudier XI. 1917	0.60
4. ANDERSEN, A. F.: Sur la multiplication de séries absolument convergentes par des séries sommables par la méthode de Cesàro. 1918	0.90
5. BRØNSTED, J. N.: En thermodynamisk Relation mellem Bland- ningsaffiniteterne i delvis mættede Opløsninger og dens Anven- delse til Affinitetsbestemmelse. Affinitetsstudier XII. 1918 ...	0.90
6. NIELSEN, NIELS: Recherches sur les polynomes d'Hermitte. 1918	1.75
7. PEDERSEN, P. O.: Om Townsends Teori for Stødionisation. 1918	0.30
8. KØHL, TORVALD: Stjernesked over Danmark og nærmeste Om- lande 1913—1917. 1918	0.30
9. TSCHERNING, M.: Moyens de contrôle de verres de lunettes et de systèmes optiques en général. 1918	0.45
10. TSCHERNING, M.: Une échelle de clarté, et remarques sur la vision à faible éclairage. 1918.....	0.70
11. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part I. A preli- minary investigation. 1919	1.75
12. KROGH, AUGUST: The Composition of the Atmosphere. An ac- count of preliminary investigations and a programme. 1919 ..	0.45
13. HARTMANN, JUL.: Om en ny Metode til Frembringelse af Lyd- svingninger. 1919	1.25
14. CHRISTIANSEN, J. A.: On the Reaction between Hydrogen and Bromine. 1919	0.65
15. TSCHERNING, M.: La théorie de Gauss appliquée à la réfraction par incidence oblique. 1919	1.25

2. BIND (Kr. 12,95):

1. WINTHER, CHR.: The photochemical Decomposition of Hydrogen Peroxide. 1920.....	0.60
2. WINTHER, CHR.: The photochemical Oxidation af Hydriodic Acid. 1920	0.90
3. WINTHER, CHR.: The photochemical Efficiency of the absorbed Radiation. 1920.....	1.15
4. ZEUTHEN, H. G.: Sur l'origine de l'algèbre. 1919	2.25
5. MITTAG-LEFFLER, G.: Talet. Inledning till teorien för analytiska funktioner. 1920	2.00

6.	CHRISTIANSEN, C. og CHRISTIANSEN, JOHANNE: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VII. 1919	1.15
7.	CHRISTIANSEN, C.: Experimentalundersøgelser over Gnidningselektricitetens Oprindelse. VIII. 1919	0.60
8.	HARTMANN, JUL.: Overfladespændingens Indflydelse ved Udstømning af en Vædske i Straaleform. 1919	1.10
9.	FAURHOLT, CARL: Über den Nachweis von Chlorid neben Bromid. 1919	0.50
10.	BRØNSTED, J. N.: On the Solubility of Salts in Salt Solutions. Studies on Solubility I. 1919	1.50
11.	HOLST, HELGE: Die kausale Relativitätsforderung und Einsteins Relativitätstheorie. 1919	2.00
12.	NIELSEN, NIELS: Recherches sur les Polynomes de Stirling. 1920.	3.50

3. BIND.

1.	THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2.	PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920	1.15
3.	WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4.	WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5.	JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920	0.50
6.	JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7.	RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrenes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8.	MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9.	BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10.	NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11.	HANSEN, H. M. and JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunktenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12.	HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13.	HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14.	FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15.	FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921.	0.75

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 5.

EN METODE TIL BESTEMMELSE AF DEN
EFFEKTIVE MODSTAND
I HØJFREKVENTE SVINGNINGSKREDSE

AF

P. O. PEDERSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr 0,70.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 5.

EN METODE TIL BESTEMMELSE AF DEN
EFFEKTIVE MODSTAND
I HØJFREKVENTE SVINGNINGSKREDSE

AF

P. O. PEDERSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Indledning.

Bestemmelsen af en Leders Modstand overfor Jævnstrøm hører til den elektriske Maaletekniks simpleste Opgaver og kan foretages med en meget høj Grad af Nøjagtighed. Helt anderledes stiller Forholdet sig ved den effektive Modstand overfor højfrekvente Strømme. Maalingen af denne hører stadig til de vanskeligere Opgaver og kan ikke udføres med nogen høj Grad af Sikkerhed, selv om Fremkomsten af bekvemme Generatorer for kontinuerlige, højfrekvente Strømme ogsaa i saa Henseende betyder et stort Fremskridt.

De ældre Metoder¹ byggede saa at sige alle paa V. BJERKNES' grundlæggende Arbejder over elektrisk Resonans i enkelte og i koblede Kredse.² Disse ældre Undersøgelser foregik ofte paa den Maade, at den undersøgte Kreds eller Oscillator gennem en Gnistudladning sattes i Svingning, og Forløbet af disse Svingninger undersøgte da i en særlig Maalekreds, der som Regel var afstemt til Generatorkredsen og koblet ret løst til denne. Maalingerne foretoges hyppigst ved Hjælp af et Kvadrantelektrometer, hvis Udslag var proportionalt med Tidsintegralet af Spændingens Kvadrat. De

¹ E. NESPER: Die Frequenzmesser und Dämpfungsmesser der Strahlentelegraphie p. 165—238. (Leipzig. 1907).

² V. BJERKNES: (a). Dämpfung schneller electrischer Schwingungen, Wied. Ann. 44, p. 74. 1891.

(b). Ueber den zeitlichen Verlauf der Schwingungen im primären Hertzschen Leiter, Wied. Ann. 44, p. 513. 1891.

(c). Ueber electrische Resonanz, Wied. Ann. 55, p. 121. 1895.

fleste af de nyere Metoder¹ beror paa Anvendelsen af kontinuerlige, højfrequente Svingninger, der fra en særlig Generator-kreds gennem en passende Koblingsanordning bringes til at paavirke den undersøgte Kreds, der i dette Tilfælde ogsaa er den Kreds, hvori Maalingerne foregaar, altsaa tillige Maalekredsen. Om de Vanskeligheder, man møder, og de Forholdsregler, man maa iagttage ved Udførelsen af disse Maalinger, giver sidstnævnte Arbejde gode Oplysninger.

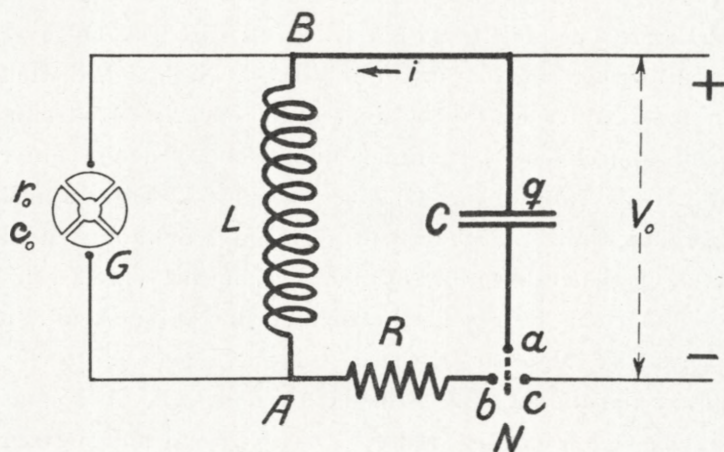


Fig. 1.

Fælles for alle de sidstnævnte Metoder er, at der benyttes en Generator-kreds, hvori der gaar Svingninger af den ønskede Frekvens, der gennem Kobling bringes til at indvirke paa Maalekredsen, som enten afstemmes fuldstændig til de nævnte Svingningers Frekvens eller gives en kendt Forstemning i Forhold til disse.

Det vilde i flere Henseender være en betydelig Fordel, om man kun havde at gøre med selve den undersøgte Kreds og de i den foregaaende Svingninger, idet man blandt andet

¹ J. H. DELLINGER: The Measurement of Radio Frequency Resistance. Proc. Inst. Rad. Eng. Vol. 7, p. 27—60. 1919.

i saa Fald vilde slippe for de Vanskeligheder, der skyldes Koblingen mellem Generatorkreds og Maalekreds.

For Svingningerne i en enkelt Kreds, bestaaende af Kondensatoren C , Selvinduktionen L og Modstanden R (se Fig. 1) gælder som bekendt

$$i = \frac{h^2}{\nu} V_0 C e^{-Kt} \sin \nu t = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right), \quad (1)$$

hvor $K = \frac{R}{2L}$, $h^2 = \frac{1}{LC}$, $\nu = \sqrt{h^2 - K^2}$, og hvor V_0 er den Spænding, hvortil Kondensatoren har været opladet ved Udladningens Begyndelse. Fig. 2 viser et Eksempel paa det ved Formel (1) bestemte Strømforløb.

For svagt dæmpede Kredse kan Formel (1) med stor Tilnærmelse skrives:

$$i = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-Kt} \sin ht = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}. \quad (1')$$

Skal man bestemme Kredsens effektive Modstand R alene paa Grundlag af de af Kredsen selv udførte Svingninger uden Benyttelse af nogen Hjælpekreds, saa maa man paa en eller anden Maade benytte sig af de for selve Svingningernes Forløb karakteristiske Konstanter. Er f. Eks. $\frac{a_1}{a_2}$ Forholdet mellem to paa hinanden følgende Maksimalamplituder til modsat Side (se Fig. 2), saa har man

$$\frac{a_1}{a_2} = e^{\frac{\pi}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}},$$

eller

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \log \text{nat} \frac{a_1}{a_2}. \quad (2)$$

Kender man L , C og Forholdet $\frac{a_1}{a_2}$, saa kan man heraf beregne R .

Denne Metode er anvendt af E. RUTHERFORD¹ og J. ZENNECK.² Førstnævnte bestemmer paa sindrig Maade Forholdet $\frac{a_1}{a_2}$ ved Hjælp af den højfrekvente Strøms magnetiske Indvirkning paa nogle i magnetisk Henseende mættede Staalnaale, medens sidstnævnte benytter sig af et BRAUNSK Rør til Bestemmelse af Forholdet mellem de paa hinanden føl-

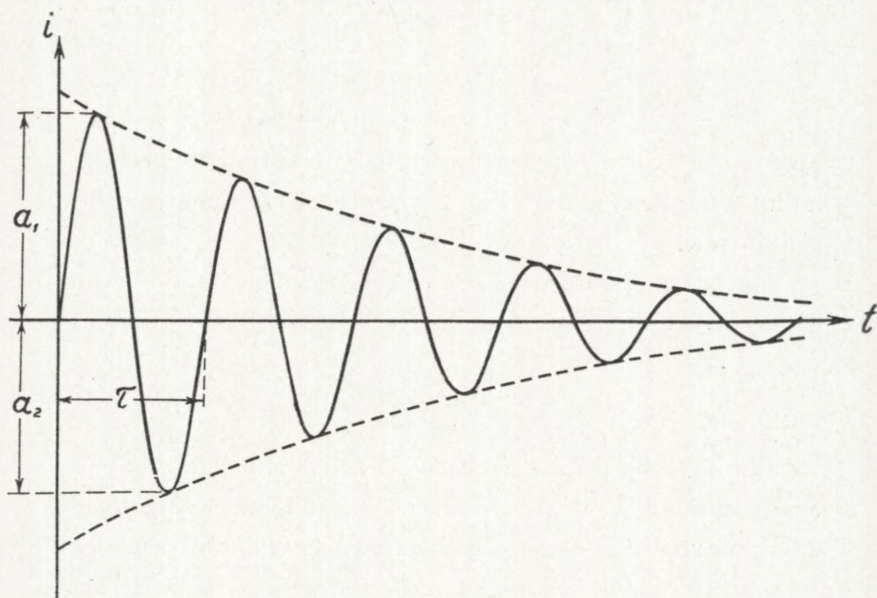


Fig. 2.

gende Maksimalamplituder af Spændingerne over Kondensatoren.

Begge de nævnte Metoder er dog ret besværlige og ikke særlig nøjagtige. Ingen af dem egner sig for meget svagt dæmpede Kredse.

Man kan imidlertid ogsaa paa anden Maade benytte sig

¹ E. RUTHERFORD: A Magnetic Detector of Electrical Waves, and some of its Applications. Phil. Trans. A. Vol. 189, p. 1. 1897.

² J. ZENNECK: Verfahren, um die Dämpfung elektrischer Schwingungen sichtbar zu machen. Ann. d. Phys. 7, p. 801. 1902.

af Svingningskurvens Forløb til Bestemmelse af R , og derved faa en Metode, der frembyder nogle Fordele i Sammenligning med de hidtil benyttede. Vi skal nu gaa over til Beskrivelsen at denne Metode, ved hvilken Maalingen foretages paa en Maade, der i flere Henseender ligner den af V. BJERKNES i Maalekredsen anvendte¹, men her er benyttet i direkte Tilknytning til den undersøgte Kreds, hvad der frembyder meget betydelige Fordele.

1. Den benyttede Metode.

Vi vil paany betragte den i Fig. 1 viste Opstilling. Kondensatoren C , der foreløbig forudsættes at være fri for Afledning, lades op til Spændingen V_0 , naar Nøglen N befinder sig i Stillingen ac . Lægges derefter N over i Stillingen ab , saa vil Elektricitetsmængden CV_0 udlade sig i den med tykke Linier angivne Kreds, idet Strømførløbet som Funktion af Tiden er givet ved Formel (1). Spændingen mellem Punkterne A og B er da $L \frac{di}{dt}$. Tidsintegralet P af denne Spændings Kvadrat taget fra $t = 0$ til $t = \infty$ findes let at være

$$P = \int_0^{\infty} \left(L \frac{di}{dt} \right)^2 dt = \frac{V_0^2}{4K} = V_0^2 \frac{L}{2R}, \quad (3)$$

eller

$$R = V_0^2 \frac{L}{2P}. \quad (3')$$

Størrelsen P kan f. Eks. maales ved Hjælp af et Kvadrantelektrometer, G , indskudt mellem A og B , idet det ene modstaaende Kvadrantpar og Naalen forbindes til det ene af de to nævnte Punkter, det andet Kvadrantpar til det andet Punkt (se Fig. 1 og 3). Udslaget vil da være propor-

¹ V. BJERKNES: Wied. Ann. 44, p. 77. 1891. S. LAGERGREEN: Über elektrische Energieausstrahlung. Stockholm. 1902.

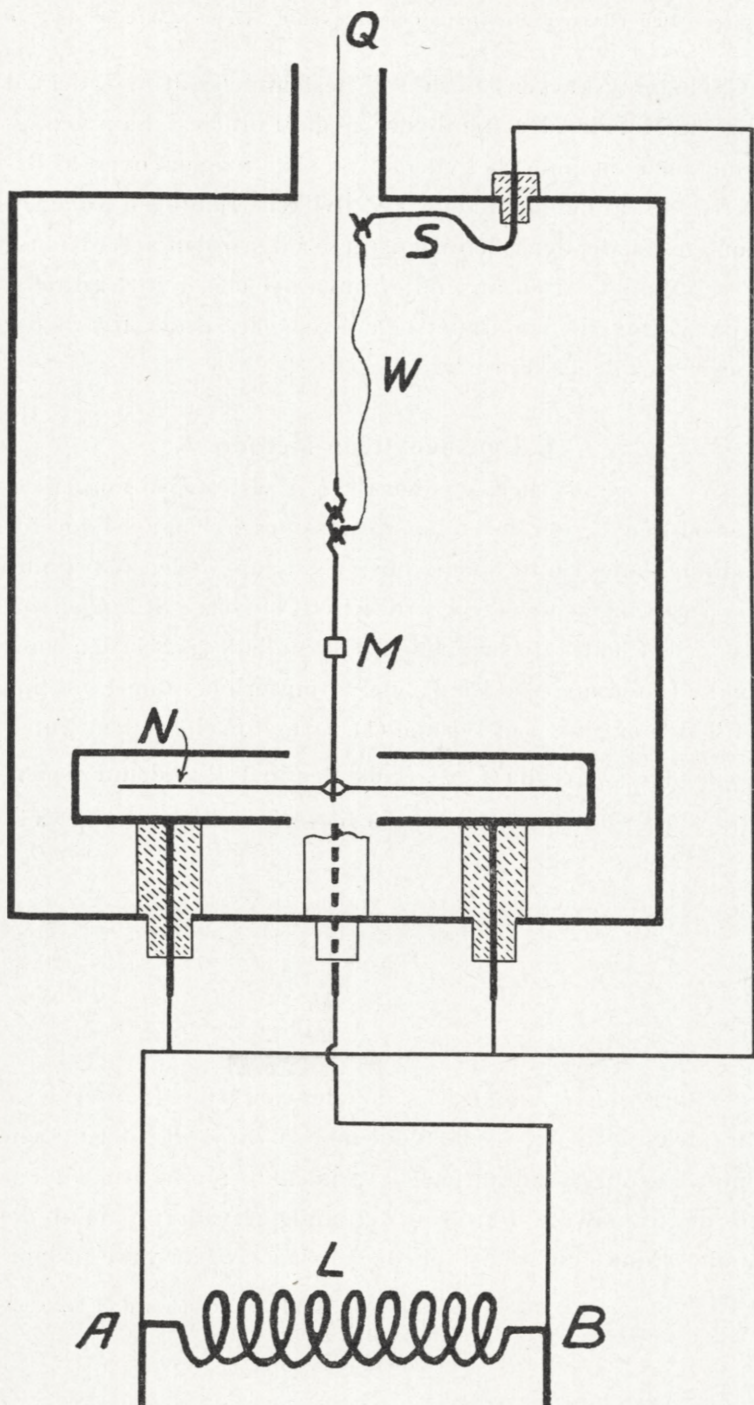


Fig. 3.

tionalt med P . Bestemmelsen af Proportionalitetsfaktoren kommer vi senere tilbage til.¹

Kender man Værdierne af V_0 , L og P , giver (3') direkte Værdien af R .

Holdes V_0 og L konstante og indskydes en ekstra Modstand r i Kredsen, faaes, naar P' er den tilsvarende Værdi af P ,

$$R + r = V_0^2 \frac{L}{2P'},$$

hvoraf i Forbindelse med (3'):

$$\frac{R + r}{R} = \frac{P}{P'}, \text{ eller } R = r \frac{P'}{P - P'}. \quad (4)$$

Ved Hjælp af to Maalinger, een foretaget med, en anden uden Ekstramodstand i Kredsen, kan man saaledes bestemme R uden Kendskab til Værdierne af V_0 , L eller af Elektrometrets ballistiske Følsomhed.

2. Undersøgelse af de mulige Fejkilder.

Er der Afledning i Kondensatoren, vil denne tabe en Del af sin Ladning i den Tid, der hengaar fra, at N bryder Kontakten med c , til den danner Kontakt med b (se Fig. 1). Er Kondensatorens Afledning betydelig, og er Tiden mellem Kontaktbrydningen ved c og Kontaktslutningen ved b ikke meget kort, saa kan dette Forhold give Anledning til en kendelig Fejl. Som det vil fremgaa af det følgende,

¹ V. BJERKNES og S. LAGERGREEN benyttede et Kvadrantelektrometer, i hvilket et Par modstaaende Kvadranter var fjernet, og de to spændingsførende Ledninger var forbundne med hver sin af de to resterende Kvadranter, medens Naalen var ophængt isoleret. Paa denne Maade undgaar man den ledende Tilledning til Naalen og derved den senere nærmere omtalte Vanskelighed ved at gøre Modstanden i denne Tilledning tilstrækkelig lille. Det er hidtil ikke lykkedes os paa denne Maade at give Elektrometret tilstrækkelig Følsomhed samtidig med, at det besad den fornødne Stabilitet.

er det forbundet med visse Vanskeligheder at gøre det nævnte Tidsinterval meget kort. Derimod kan Fejlen praktisk talt elimineres ved den i Fig. 4 viste Anordning. Her er R_0 to store Modstande, der er indskudt mellem Spændingskilden og Kondensatoren. Modstandene R_0 er som sagt store, men deres Værdi skal paa den anden Side være forsvindende i Sammenligning med Kondensatorens Isolationsmodstand. Disse Betingelser vil det som Regel være let at opfylde.

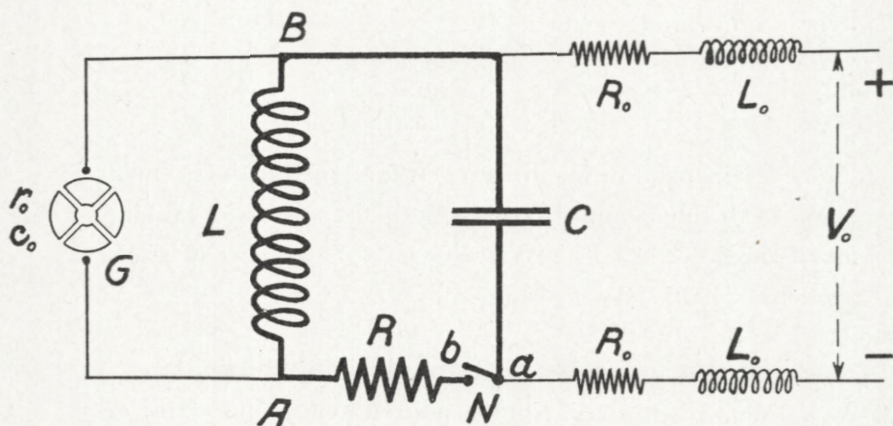


Fig. 4.

(Værdien af R_0 kan f. Eks. ligge mellem $1 \cdot 10^5$ og $1 \cdot 10^6$ Ohm). Spændingsledningerne kan da, som vist paa Figuren, forbindes permanent til C , idet der blot i Tilledningerne indskydes et Par store Selvinduktionsruller L_0 , der hindrer Svingningerne i at forplante sig ud ad Spændingsledningerne.

Der vil ganske vist i dette Tilfælde, saa længe N er sluttet, gaa en konstant Strøm gennem L , hvis Styrke er givet ved $V_0/2R_0$. Er den ohmske Modstand af L lig med r' , saa vil der som Følge heraf opstaa en Spændingsforskel paa $V_0 \cdot \frac{r'}{2R_0}$ mellem A og B . Er f. Eks. $V_0 = 400$ Volt, $R_0 = 200000$ Ohm og $r' = 1$ Ohm, og holdes Nøglen N

sluttet i 5 Sekunder, saa bliver den tilsvarende Værdi af (Spænding)²·Tid = $p = 5 \cdot 10^{-6}$ (Volt)²·Sek.

Den til Svingsningerne svarende Værdi af P bliver af Størrelsesordenen

$$P = 100 \text{ (Volt)}^2 \cdot \text{Sek.}$$

Den af Jævnstrømmen gennem L foraarsagede Fejl er derfor ganske betydningsløs.

Ved Udledningen af Formel (3) er der ved Bestemmelse af Spændingerne mellem A og B kun taget Hensyn til Selvinduktionen L , ikke til Rullens effektive Modstand. Man overbeviser sig dog let om, at den derved begaaede Fejl for alle ikke ekstra stærkt dæmpede Kredse er ganske betydningsløs.

Endelig er der Mulighed for, at den ikke ubetydelige Modstand r_0 , der findes i Tilledningen til Kvadrantelektrometrets Naal, i Forbindelse med dens Kapacitet c_0 til det modstaaende Kvadrantpar paa to Maader kunde bevirke en kendelig Fejl, nemlig dels ved at forøge Kredsens Dæmpning, dels ved at reducere Spændingen paa Naalen.

Vi vil først betragte førstnævnte Fejlkilde. Er Kondensatorspændingens Maksimalværdi et vist Øjeblik lig med V , saa er Tabet ΔW i Tiden Δt bestemt ved

$$\Delta W = \frac{1}{2} V^2 \frac{C}{L} R \Delta t.$$

Tabet Δw i Elektrometertilledningen er i samme Tids-element bestemt ved

$$\Delta w = \frac{1}{2} V^2 \frac{c_0^2}{CL} r_0 \Delta t.$$

Følgelig er

$$\frac{\Delta w}{\Delta W} = \frac{c_0^2}{C^2} \cdot \frac{r_0}{R}. \quad (5)$$

For den senere hen behandlede Opstilling er c_0 højst 5 cm, $r_0 =$ højst 180 Ohm, $C =$ ca. 10000 cm, og $R =$ 0.6 Ohm. Man har da

$$\frac{Aw}{AW} = 7,5 \cdot 10^{-5},$$

altsaa en ganske forsvindende Fejl. (For $C = 500$ cm bliver under iøvrigt samme Forhold $\frac{Aw}{AW} = 0.03$).

Den Brøkdæl η af Spændingen, der tabes i Elektrometer-tilledningen, er, som man let ser, med stor Tilnærmelse givet ved

$$\eta = \nu c_0 r_0. \quad (6)$$

Sættes her $\nu = 1.10^6$, $c_0 = 5$ cm $= 5/9 \cdot 10^{-11}$ F og $r_0 = 180$ Ohm, saa er

$$\eta = 0.001.$$

Ogsaa denne Korrektion er, hvor Frekvensen ikke er meget høj, forsvindende.

Paa den anden Side viser Formlerne (5) og (6), at det er af Betydning, at Modstanden r_0 i Tilledningen til Naalen er saa ringe som mulig. Vil man hænge Naalen op i en forholdsvis kort og forholdsvis tyk Traad, saa bliver paa den anden Side Elektrometrets Følsomhed for ringe. Man kan maaske lade Tilledningen foregaa gennem en Metaltraad, der fra Naalen hænger ned i en ledende Væske, medens Naalen iøvrigt hænger i en lang, tynd Kwartstraad. Det lykkedes os dog ikke paa denne Maade at naa til en tilfredsstillende Løsning. Derimod gav det i Fig. 3 viste Arrangement et tilfredsstillende Resultat. Naalen N er her hængt op i en Kwartstraad Q , og Tilledningen sker gennem den tykke Traad S , som bærer Wollastontraaden W , der sætter S i ledende Forbindelse med Naalen. Wollastontraadens Kærne bestaar af en 0.007 mm tyk Platintraad, men det ydre Sølvlag er kun fjernet paa dens midterste Del, medens det er bibeholdt ved begge Ender, saaledes at man der kan danne Kroge, der, som vist, tjener til Traadens Forbindelse

med *S* og *N*. Modstanden i denne Tilledning overstiger i hvert Fald ikke de foran nævnte 180 Ohm.

3. Udladenøglen.

Tilbage staar endnu at omtale de Fejl, der skyldes Tab i selve Udladenøglen *N* (Fig. 1 og 4). Det viste sig straks, at man her stod over for en meget betydelig Vanskelighed.

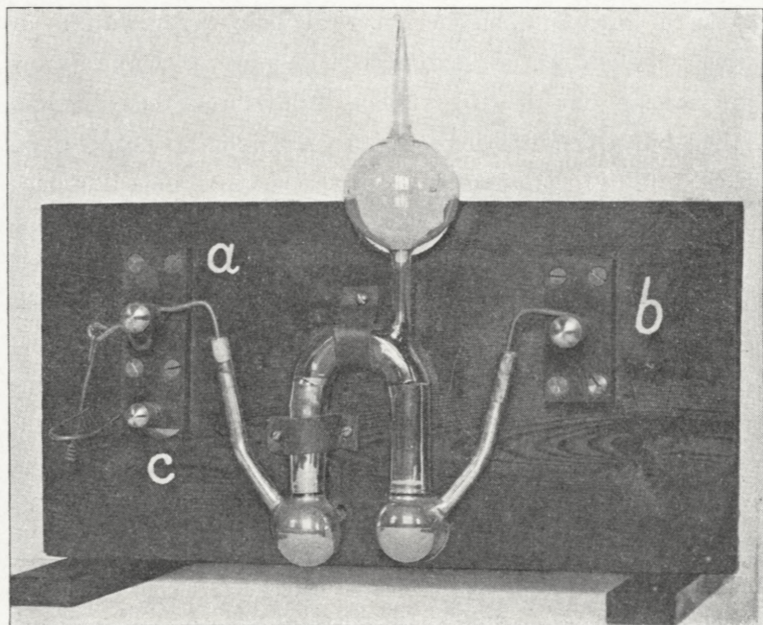


Fig. 5.

Til at begynde med benyttedes en almindelig Udladenøgle, men Elektrometrets Udslag var da dels alt for smaa — helt ned til $\frac{1}{20}$ af den Værdi, de burde have, — dels meget uregelmæssige. Der kunde næppe være nogen Tvivl om, at dette skyldtes Slutningsgnisten ved *b*. Der prøvedes derfor en Mængde Anordninger, som tilsigtede en pludselig Tilvejebringelse af en god og sikker Kontakt. Her skal nævnes polerede Staal- og Kobberhamre, der med betydelig Hastighed sloges mod polerede Staal eller Kobberplader. Ingen af

de saaledes prøvede Metoder, hvor Kontakterne dannedes mellem faste Legemer, førte til det ønskede Resultat. Derimod viser det sig, at naar Kontakten dannes mellem en fuldstændig ren Kviksølvflade og en ren Metalstang (Staal, Wolfram, Platin), faar man store og konstante Udslag. Vel at mærke, naar man før hver Strømslutning fornyer Kviksølvoverfladen og renser Metallet.

Dette førte Tanken hen paa at lade Strømslutningen foregaa mellem to Kviksølvmasser i Vakuum. Denne Fremgangsmaade har vist sig at være fuldt ud tilfredsstillende. Vi har hidtil benyttet den i Fig. 5 viste Kviksøvlampe, hvor Strømslutningen simpelthen sker ved at vippe hele Lampen, saaledes at Kviksølvet fra den ene Gren i Form af en sammenhængende Straale løber over til Kviksølvet i den anden Gren. I det foreliggende Apparat er denne Straale forholdsvis lang, og den har naturligvis ikke altid samme Tværsnitsareal. Der kan herved indføres en Usikkerhed paa omkring 0.005 Ohm, medens hele Nøgleapparatets Modstand ligger omkring 0.01 Ohm. For at formindske denne Usikkerhed, kan man konstruere Kviksølvapparatet saaledes, at Straalen bliver betydelig kortere. Et saadant Apparat er under Bygning. I det følgende er der ikke taget særligt Hensyn til selve Nøglearrangementets Modstand. Naar denne ved forbedret Konstruktion formindskes, kan man derfor vente, at Resultaterne vil stemme endnu bedre overens end hidtil.

En nærmere Behandling af Grundene til disse Nøglevanskeligheder og deres Bortfald ved Vakuum-Kviksølv-nøglen maa opsættes til en senere Lejlighed.

4. Bestemmelse af Elektrometrets ballistiske Følsomhed.

Til denne Bestemmelse har vi anvendt den i Fig. 6 skitserede Opstilling, hvor R_1 er en ret stor, saa vidt mulig

kapacitetsfri og selvinduktionsfri Modstand og C_1 en godt isoleret Glimmerkondensator. Lades C_1 ved Hjælp af Nøglen N op til Spændingen V_1 og udlades den derefter, ved at N føres over i Stillingen ab , gennem Modstanden R_1 , saa vil der mellem Punkterne A og B under Udladningen opstaa en varierende Spænding. Tidsintegralet af denne Spændings Kvadrat, B , lader sig let forudberegne.¹

For at se hvilken Indflydelse det har, at R_1 ikke er fri for Selvinduktion, gennemfører vi Regningen under den

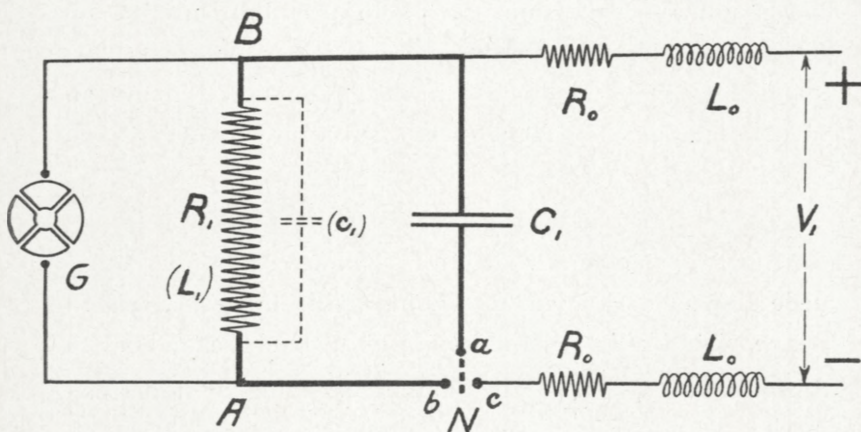


Fig. 6.

Forudsætning, at der foruden Modstanden R_1 tillige findes en Selvinduktion L_1 , idet vi dog gaar ud fra, at Kredsen $C_1 L_1 R_1$ er aperiodisk.

Kaldes den øjeblikkelige Værdi af Spændingen over Kondensatoren V_1 og indføres følgende Forkortelser

$$K_1 = \frac{R_1}{2L_1} \text{ og } h_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1},$$

har man

¹ De i Spændingstilledningerne viste Modstande og Selvinduktionsruller er i og for sig overflødige ved denne Maaling. De er vist her, fordi de som Regel fandtes, da samme Opstilling benyttedes til Maalingerne i Fig. 4 og 6.

$$v_1 = \frac{V_1}{2\sqrt{K_1^2 - h_1^2}} \left((K_1 + \sqrt{K_1^2 - h_1^2}) e^{(-K_1 + \sqrt{K_1^2 - h_1^2})t} + \right. \\ \left. + (-K_1 + \sqrt{K_1^2 - h_1^2}) e^{-(K_1 + \sqrt{K_1^2 - h_1^2})t} \right). \quad (7)$$

Herefter faas let

$$B = \int_0^{\infty} v_1^2 dt = \frac{1}{4} V_1^2 \frac{4K_1^2 + h_1^2}{K_1 h_1^2} = \frac{1}{2} V_1^2 \left(R_1 C_1 + \frac{L_1}{R_1} \right). \quad (8)$$

Ved den i Fig. 6 viste Anordning vil R_1 sjælden være meget under 10000 Ohm og C_1 som Regel ikke mindre end $0.1 \cdot 10^{-6} F$. Sidste Led i Parentesen i (8) er da ganske forsvindende i Sammenligning med det første, og man kan med udmærket god Tilnærmelse sætte

$$B = \frac{1}{2} V_1^2 R_1 C_1. \quad (8')$$

Har Modstanden R_1 den med punkterede Linier antydede Kapacitet c_1 uden Modstand i Tilledningerne, saa vil denne øjeblikkelig ved Udladningens Begyndelse oplades til Spændingen $V_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + c_1}$, og samme Spænding vil findes paa C_1 . I saa Fald faar man

$$B_1 = \frac{1}{2} \left(V_1 \frac{C_1}{C_1 + c_1} \right)^2 R_1 (C_1 + c_1) = \frac{1}{2} V_1^2 \frac{C_1^2}{C_1 + c_1} R_1. \quad (9)$$

Heraf følger ved Sammenligning med (8'):

$$\frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C_1 + c_1}. \quad (10)$$

Ogsaa denne Korrektion vil, for gode Modstande, være ganske betydningsløs.

Tilbage staar Spørgsmaalet om Indflydelsen af det ved Kontaktslutningen ved b forarsagede Tab. Her viser det sig, ganske i Overensstemmelse med det foran omtalte, at hvis man ved N anvender en almindelig Udladenøgle, saa

bliver de Udslag, man faar paa Elektrometret G , dels noget for smaa, dels ret usikre. Selv om Forholdene her ikke er saa ugunstige som ved Udladning af Svingningskredsen i Fig. 1 og 4, saa er en saadan Nøgle dog uanvendelig. Man kan ogsaa her overvinde Vanskeligheden paa ganske analog Maade ved at benytte det i Fig. 5 viste Vakuum-Kviksølv-apparat til Kontaktslutningen mellem a og b . Afbrydningen mellem a og c sker da automatisk ved Apparatets Vipning ved Hjælp af den i Fig. 5 viste, bevægelig ophængte Kobbertraad. Betegnelserne $a b c$ paa Fig. 5 svarer til de i Fig. 1, 4 og 6 anvendte.

Naar man benytter Vakuum-Kviksølvnøglen og anvender en Spænding V_1 paa 440 Volt, viser det sig, at Elektrometrets Udslag meget nær er konstante, og Nøgletabet er da sikkert meget ringe. Man kan da benytte Opstillingen i Fig. 6 til Bestemmelse af Elektrometrets ballistiske Følsomhed. Hertil kræves blot, at man beregner Værdien af B efter Formel (8') og maaler Elektrometrets Udslag S ; man har da

$$S = \gamma B, \quad (11).$$

hvor vi kalder Proportionalitetsfaktoren γ for Elektrometrets ballistiske Følsomhed.

5. Kontrolforsøg og Eksempler paa Maalinger.

Først blev det undersøgt, om Elektrometrets ballistiske Følsomhed γ var uafhængig af Udslaget's Størrelse. Denne Undersøgelse foretoges ved Hjælp af et HELMHOLTZ' Pendul, der ved hvert Forsøg satte en Spænding V Volt paa Elektrometret i T Sekunder. Tiden T holdtes konstant, medens Spændingen varieredes indenfor vide Grænser. Det viste sig, at Udslaget S meget nær var proportionalt med V^2 .

Derimod viste det sig ved alle de foretagne Maalinger, at Følsomheden forandrede sig lidt fra Tid til anden. Dette

hænger vistnok sammen med Tilledningstraadens Tilknytning til det ophængte System og vilde maaske kunne undgaas ved en noget ændret Konstruktion af Elektrometret, men der har ikke været Lejlighed til at gaa nærmere ind paa dette Spørgsmaal. Variationen i Følsomheden andrager nogle faa Procent, og den er i de nedenfor refererede Maalinger søgt elimineret ved at bestemme Følsomheden før og efter Dæmpningsmaalingerne.

Vi skal derefter gaa over til at omtale nogle af de foretagne Maalinger.

Det blev først undersøgt, om Udslaget S for den undersøgte Svingningskreds uden ekstra Modstand var proportional med Kvadratet paa den benyttede Spænding. I nedenstaaende Tabel 1 viser S_0 de observerede Udslag og S_b de under den angivne Forudsætning beregnede.

Tabel 1.

V	S_0	S_b	$S_b - S_0$
440 Volt	107,3	107,3	
220 —	27,0	26,8	— 0,2
110 —	5,9	6,6	+ 0,7

Afvigelsen er her ikke større, end hvad der svarer til Usikkerheden ved Maalingernes Udførelse.

Tabel 2 gengiver Resultaterne af en Forsøgsrække, ved hvilken der var indskudt Ekstramodstande r i Kredsen. I Rubriken R er opført de paa Grundlag af Formel (4) beregnede Værdier af Kredsens egen, effektive Modstand.

Tabel 2 giver dels et Indtryk af Overensstemmelsen mellem de enkelte Maalinger, dels viser den, at Bestemmelsen af R indenfor vide Grænser er uafhængig af Værdien af den benyttede Ekstramodstand.

Tabel 2.

$$V = 432 \text{ Volt. } L = 1,345 \cdot 10^{-3} H.$$

r	S	S_{midd}	R	$R - R_{\text{midd.}}$	f
Ohm	mm	mm	Ohm	Ohm	%
0	$\left\{ \begin{array}{l} 102,0 \\ 101,9 \\ 101,5 \\ 101,4 \end{array} \right\}$	101.7	—	—	—
0.1	$\left\{ \begin{array}{l} 88,2 \\ 89,0 \\ 89,1 \\ 89,0 \end{array} \right\}$	88.82	0.689	+ 0.006	+ 1,0
0.3	$\left\{ \begin{array}{l} 71.1 \\ 70.7 \\ 69.9 \\ 72.0 \end{array} \right\}$	70.93	0.690	+ 0.007	+ 1,0
0.5	$\left\{ \begin{array}{l} 58.2 \\ 58.5 \\ 58.5 \\ 58.6 \end{array} \right\}$	58.45	0.676	- 0.007	- 1,0
1.0	$\left\{ \begin{array}{l} 41.5 \\ 40.7 \\ 40.1 \\ 40.5 \end{array} \right\}$	40.70	0.668	- 0.015	- 2,2
2.0	$\left\{ \begin{array}{l} 26.1 \\ 25.8 \\ 26.0 \\ 26.5 \end{array} \right\}$	26.1	0.691	+ 0.008	+ 1.2

$$R_{\text{midd.}} = 0.683 \text{ Ohm}$$

De i Tabel 1 og 2 opførte Resultater tyder bestemt paa, at Tabene ved Slutningsgnisten med den benyttede Vakuumpviksølvnøgle er forsvindende. I modsat Fald maatte man have ventet en bestemt Gang i Maalingernes Afvigelse fra Middeltallet. En saadan findes ingen af Stederne.

Endelig har man under Benyttelse af det i Fig. 6 viste

Arrangement bestemt det benyttede Kvadrantelektrometers ballistiske Følsomhed γ . Ved Bestemmelsen var $V_1 = 432$ Volt, $C_1 = 0.25 \cdot 10^{-6} F$. og $R_1 = 8000$ Ohm. Den tilsvarende Værdi af B er ifølge (8')

$$B = 186,6 \text{ (Volt)}^2 \text{ Sek.}$$

Hertil svarede et Udslag paa $S = 109,5$ mm. Af Ligning (11) følger da

$$\gamma = \frac{S}{B} = 0.588.$$

Ved samme Lejlighed bestemtes Udslaget svarende til Udladning gennem den undersøgte Svingningskreds uden Ekstramodstand. Til $V = 432$ Volt, $L = 1,345 \cdot 10^{-3} H$ svarede et Udslag paa 108 mm. Til Bestemmelse af R haves da ifølge Formel (3):

$$\frac{1}{2} 432^2 \frac{1.345 \cdot 10^{-3}}{R} = \frac{108}{\gamma} = 183,6.$$

Heraf faas $R = 0.684$ Ohm, der stemmer særdeles godt overens med den i Tabel 2 fundne Middelværdi, $R = 0.683$ Ohm. Ogsaa dette Resultat tyder bestemt paa, at man ved den anvendte Metode har elimineret den fra Kontaktslutningen hidrørende Usikkerhed.

Er Elektrometrets Følsomhed, γ , konstant, og har man een Gang for alle bestemt dennes Værdi f. Eks. ved den i Fig. 6 viste Metode, saa kan man bestemme den effektive Modstand i en Svingningskreds, naar man kender dennes Selvinduktion, ved en enkelt Maaling, idet man har

$$R = \frac{1}{2} V^2 L \cdot \frac{\gamma}{S}. \quad (12)$$

Slutning.

Som Fordele ved Metoden kan fremhæves:

1. Den er baade bekvem og meget hurtig.
2. Den giver forholdsvis meget nøjagtige Resultater, især for svagt dæmpede Kredse.

3. Den kræver ingen særlig Generator for højfrekvente Svingninger, og den undgaar derfor ganske alt det med Afstemningen og Koblingen forbundne Besvær og alle de dermed følgende Vanskeligheder.

Ved Udførelsen af de ovenfor omtalte Forsøg har jeg haft udmærket Hjælp af Elektroingeniør CHR. NYHOLM. En Del af Udgifterne til Forsøgene er afholdte af en Understøttelse fra Carlsbergfonden.

*Laboratoriet for Telegrafi og Telefoni. Den polytekniske Læreanstalt.
November 1921.*

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7. RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyreernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunktenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometers Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse « $\text{NH}_2\text{COONH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons (\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ » und « $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3$ ». 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. (Under Pressen)	
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922	0.70

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 6.

MILLIMÈTRE ÉTALONNÉ PAR
DES INTERFÉRENCES

PAR

K. PRYTZ



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 0,75.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 6.

MILLIMÈTRE ÉTALONNÉ PAR
DES INTERFÉRENCES

PAR

K. PRYTZ



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Méthode d'observation. — En construisant l'appareil interférentiel décrit dans ce mémoire je me suis proposé premièrement de trouver un moyen de mesurer commodément des longueurs de l'ordre d'un millimètre ou moins, en supposant qu'on puisse obtenir la comparaison des dites longueurs avec le mètre international par un plus petit nombre de mesurages en remontant de la longueur d'onde qu'en descendant du mètre, s'il s'agit d'obtenir la précision d'une fraction de μ . En second lieu j'ai voulu arranger l'appareil pour la vérification d'une règle divisée en millimètres, de manière qu'on étudie chacun des mm directement par un mesurage interférentiel continu, tandis que les centimètres sont déterminés par des mesurages interférentiels successives, chacun s'étendant approximativement sur 1 mm.

Un cm d'une règle est mesuré de la manière suivante. La règle peut être déplacée sous un microscope. Ayant placé le trait initial dans l'axe du microscope on déplace la règle jusqu'à ce que le trait de millimètre suivant se fasse voir près du fil du micromètre; on ne tient pas à un ajustage précis du trait par rapport au fil. La grandeur du déplacement est trouvée en déterminant le nombre des longueurs d'onde y contenues. On continue ainsi jusqu'au trait final du cm; il est ajusté avec précision dans l'axe du microscope comme le trait initial.

En faisant la somme des dix nombres on aura le nombre total des longueurs d'onde que contient le centimètre; sa valeur sera déterminée avec une précision dépendant principalement de la précision avec laquelle la mise au point du microscope peut la définir, l'erreur provenant de l'addition des dix nombres des longueurs d'onde contenues dans les millimètres étant assez petite en comparaison des erreurs des deux pointages microscopiques. En effet la détermination de chacun des déplacements se fait avec une précision d'un vingtième de la longueur d'onde, savoir de $0,025 \mu$; ainsi l'erreur moyenne de leur somme ne surpassera pas $0,08 \mu$, tandis que le pointage en amènera $0,25 \mu$ au moins. L'étalonnage pouvant être fini pendant 20 à 25 minutes on verra que par un travail facile on peut obtenir une très bonne détermination d'un cm en répétant quelques fois le mesurage.

J'ai trouvé qu'on peut, dans les conditions données, observer et compter sans interruption les franges interférentielles pendant 2 à 3 heures sans être tellement fatigué que le résultat en est compromis; pendant cet espace de temps on peut venir à bout d'une longueur de 5 cm suivant la méthode décrite plus haut au cas de 1 cm. On peut ainsi déterminer la somme des longueurs d'onde comprises dans un demi-décimètre, pourvu qu'on ait des conditions de température favorables dans le laboratoire. L'erreur provenant de la sommation des cinquante nombres des longueur d'onde est comparable à l'erreur de l'observation microscopique.

L'appareil interférentiel. La source lumineuse que j'applique est l'arc à mercure dans le vide. L'arc est produit dans un tube de verre de la forme donnée par la fig. 1, placé dans un manteau en tôle noircie. La lumière sortant

par une ouverture peut être arrêtée par un couvercle. La lampe est fournie par la force électromotrice de 220 volts des usines municipales, une résistance convenable y étant jointe. Monsieur le docteur ès sciences H. M. HANSEN a eu l'heureuse idée de réunir le couvercle à un interrupteur de telle manière que, l'ouverture fermée, la résistance soit diminuée, après quoi on allume aisément la lampe en la basculant un peu. Mais pour s'en servir il faut écarter le couvercle et par cette manœuvre on intercale automatiquement la résistance convenable à un emploi prolongé.

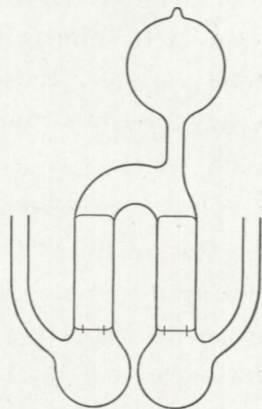


Fig. 1.

La lampe donne les quatre lignes spectrales du mercure très intenses, savoir un bleu avec la longueur d'onde $\lambda_b = 0,4358341 \mu$, un vert, $\lambda_v = 0,5460740 \mu$ et deux jaunes $\lambda_{j_1} = 0,5769596 \mu$ et $\lambda_{j_2} = 0,5790657 \mu$; elles sont toutes employées dans l'appareil.

L'interférence de Newton dont je me sers se produit au moyen de deux glaces planes argentées l'une d'une couche épaisse, l'autre d'une couche transparente. Elles sont placées l'une contre l'autre, les faces argentées en regard. L'une est fixée à la semelle de l'appareil tandis que l'autre est attachée à un petit chariot (voir la fig. 3) dont le mouvement est dirigé par deux glissières. Ce mouvement est limité à un déplacement qui dépasse d'un peu 1 mm.

La lumière passe par une lunette autocollimatrice (*L*, fig. 3) construite par M. Pulfrich¹ à l'usage du dilatomètre de Fizeau; sortant de la lampe la lumière est concentrée par

¹ Pulfrich, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1898, p. 261.

une lentille vers le petit prisme réfléchissant p_1 . Ayant passé l'objectif de la lunette elle est de nouveau réfléchi par le prisme p_2 qui la dirige vers les glaces G_1 et G_2 . Y ayant établi l'interférence la lumière passe de nouveau la lunette en sortant par l'oculaire. Avant son entrée dans celui-ci la lumière passe par une fente horizontale à latitude variable. Entre l'oculaire et l'œil un petit prisme à vision directe est intercalé dont la dispersion est assez petite pour qu'on voie en même temps toutes les quatre lignes spectrales du mercure nommées plus haut.

On adapte le tirage de la lunette à vision distincte des traits circulaires tracés sur la face de derrière de la glace fixe G_2 . On verra alors les quatre images de la fente traversées par les franges interférentielles dont la direction et les distances mutuelles sont accidentelles. On obtient les distances convenables à l'observation entre les franges en faisant jouer trois vis qui règlent la position de la glace G_1 .

La direction des franges doit être verticale, normale aux images de la fente, ce qu'on obtient au moyen d'un prisme de Dove placé dans la lunette; par réfraction de la lumière dans deux des faces du prisme et par la réflexion totale dans une troisième le prisme a l'effet de tourner l'image d'un angle qui est le double de celui dont on a tourné le prisme.

Dans l'oculaire sont placés deux fils parallèles et verticaux; l'oculaire étant mobile autour d'un axe vertical on peut ajuster le double fil à une frange voulue par une vis micrométrique. La lunette contient encore un diaphragme iris par lequel on peut rétrécir le faisceau lumineux.

On donne à la fente une telle latitude que son image verte et l'une de ses deux images jaunes se rencontrent. Les deux images jaunes se couvrent alors presque com-

plètement; on voit seulement en haut et en bas deux bordures très étroites en lumière pure. Les choses ainsi arrangées on ne voit que trois bandes lumineuses et horizontales traversées par des franges verticales noires; celles-ci sont très étroites parce que la glace antérieure, assez fortement argentée, a un grand pouvoir réflecteur; étant aussi bien distinctes les franges sont des objets bien aptes pour la mise au point. Les franges noires du bleu sont les plus nettes, celles du vert le sont un peu moins. Celles du jaune sont assez estompées en pleine lumière, quand la distance des deux faces argentées s'approche à un millimètre; en revanche la grande intensité du jaune permet de rétrécir le faisceau lumineux à un tel degré que les franges deviennent distinctes. Vue dans la lunette chacune des trois bandes a une latitude apparente de deux à trois mm; pour la distance apparente entre les franges vertes j'ai trouvé que 3 à 4 mm sont convenables.

Ayant établi les interférences par deux glaces planes en employant plusieurs sortes de lumière monochromatique on peut, c'est bien connu, se servir des coïncidences entre les franges des diverses couleurs pour déterminer la distance qui sépare les faces en regard des deux glaces. A cet effet la lumière du mercure, décomposée par un prisme comme mentionné plus haut, est très applicable; la coïncidence est constatée quand deux franges de deux couleurs sont situées sur une même ligne droite.

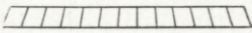
Entre les franges du bleu et celles du vert il existe des coïncidences approximatives pour toutes les quatre franges vertes, entre celles du vert et du jaune pour toutes les dix-huit vertes. Comme mentionnée plus haut les deux bandes jaunes se couvrent à peu près; dans l'image interférentielle de cette double bande on a donc deux systèmes

de franges dont la position relative varie assez lentement quand les franges se déplacent à cause d'une variation de la distance entre les deux glaces.

Dans le »Recueil de Constantes Physiques«, publié par la Société Française de Physique, on trouve les valeurs citées plus haut des deux longueurs d'onde $\lambda_{j_1} = 0,5769596 \mu$ et $\lambda_{j_2} = 0,5790657 \mu$ dans l'air à 15° et à la pression de 760 mm. Calculant le nombre s de l'équation $275 \lambda_j = (275 - s) \lambda_{j_2}$ j'ai trouvé

$$s = 1,00002.$$

s ne résultant qu'avec une précision de $1/20000$, le dernier chiffre n'est pas sûr; il faut donc mettre $s = 1$ et $\lambda_{j_2} : \lambda_{j_1} = 275 : 274$ avec une précision dépendant de la précision des valeurs observées des deux longueurs d'onde.

Il s'en suit du calcul qu'on trouvera dans la bande jaune des coïncidences qui se répètent toujours quand la variation de la distance des deux glaces a fait passer 274 franges de la lumière λ_{j_2} . La variation d'un mm fait paraître 13 coïncidences de cette sorte. Comme elles sont très faciles à reconnaître elles peuvent servir comme des repères très commodes dans la multitude des franges. Quoique les coïncidences soient exactes à cause du rapport simple des longueurs d'onde on ne peut démontrer leurs positions dans l'image interférentielle qu'avec une incertitude de une à deux franges par suite de la lente variation de la position relative des franges. Si l'on rétrécit la fente de la lunette jusqu'à ce que les deux bandes jaunes soient sur le point de se séparer l'ensemble des deux bandes présente à peu près l'aspect de la figure  ce qui permet de trouver approximativement la coïncidence.

Afin de pouvoir distinguer l'une de l'autre les 13 coïn-

cidences j'ai cherché ce que je nommerai une constellation dans le voisinage de chacune d'elles, c'est à dire un endroit dans l'image interférentielle où trois franges dans les trois bandes sont situées à peu près sur une même ligne droite ou présentent une autre position relative régulière, facile à reconnaître. L'aspect de la constellation joint à sa distance de la coïncidence fait reconnaître le numéro de la coïncidence.

Dans le but d'obtenir un étalon interférentiel du millimètre j'ai cherché deux constellations spéciales dont l'apparence successive entre les deux fils de l'oculaire correspond à un déplacement de la glace mobile à peu près égal à un millimètre. La glace commence son mouvement à une distance de la glace fixe un peu au-dessus d'un mm; étant dans cette position initiale elle présente une constellation, la constellation zéro (F dans la fig. 2). L'ayant déplacée jusqu'à ce que 3659 franges vertes aient passé les fils on trouvera une autre constellation, la constellation finale, A dans la fig. 2; un mm correspondant à 3662,51 intervalles, le déplacement sera donc égal à $1 \text{ mm} \div \frac{1}{2} \cdot 3,51 \lambda_v$. J'ai trouvé le nombre 3659 de la manière que voici.

La figure 2 montre les constellations A, B, C, D, E et F dont je me suis servi. Les franges des diverses couleurs seront notées respectivement par b, v, j_1 et j_2 . A correspond à une distance des glaces égale environ à 66μ . On a compté les nombres d'intervalles inscrits dans la figure entre les franges vertes de A et de B , de C et de E , de E et de D . On a mesuré par le micromètre de la lunette les phases de diverses franges bleues et jaunes dans A, B, C et E , la phase d'une frange signifiant sa distance d'une ligne droite prolongeant la frange verte de la constellation, l'intervalle

des franges vertes pris comme unité; le signe de la phase est choisi positif à droite.

Les constellations B et E sont situées respectivement près de la treizième et de la première coïncidence; on connaît donc approximativement le nombre d'intervalles jaunes entre j_1 en B et j_1 en E , 275 intervalles se trouvant entre deux coïncidences consécutives. Ayant observé la phase z de b et la phase y de j_1 en B aussi bien qu'en E , on pourra donc calculer le nombre exact N_v des intervalles de franges vertes situées entre les deux franges vertes dans B et dans E aussi bien que le nombre correspondant N_b des intervalles bleus.

Quant aux deux phases z_B et y_B en B on les a obser-

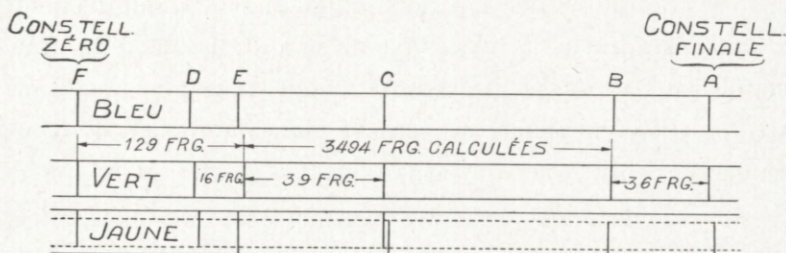


Fig. 2.

vées directement, mais en outre on les a déduites des observations en A . On a observé $z_B = 0,08$ et $z_A = 0,00$. La dernière valeur combinée avec la connaissance du nombre 36 d'intervalles verts entre A et B et du rapport $\lambda_v : \lambda_b$ donne la même valeur de z_B que l'observation directe. On a donc

$$z_B = 0,08.$$

L'observation directe a donné $y_B = -0,02$. En A on a observé la phase de j_2 égale à $+0,04$; de cette valeur on déduit la phase de j_2 en B égale à $-0,01$. Pour avoir la phase y_B de j_1 en B on se sert de l'observation que j_1 en B est distant d'environ 8 intervalles jaunes à droite de la treizième coïncidence jaune, ce qui donne la phase relative

de j_1 par rapport à j_2 égale à $-0,03$; par là on obtient la valeur $-0,04$ pour y_B . La moyenne des deux valeurs donne

$$y_B = -0,03.$$

Par des calculs analogues j'ai trouvé la phase z_E de la frange b en E et y_E celle de la frange j_1 en E , ayant observé les phases de b en C égale à $0,00$ et de b en D égale à $-0,14$ ainsi que les phases de j_1 en C égale à $0,00$ et de j_1 en D égale à $+0,08$. Je trouve donc par calcul pour z_E les deux valeurs $-0,11$ et $-0,10$ et pour y_E les valeurs $-0,10$ et $-0,07$. Les moyennes deviennent

$$z_E = -0,10 \quad \text{et} \quad y_E = -0,09.$$

Ayant jugé que les deux franges j_1 de E et de B sont situées respectivement à 2 intervalles jaunes à droite de la première coïncidence jaune et à 8 intervalles à droite de la treizième coïncidence, je sais que le nombre N_j d'intervalles jaunes entre les deux franges j_1 est approximativement égal à $12 \times 275 + 8 - 2 = 3306$. Les valeurs des quatre phases z_B, y_B, z_E, y_E étant connues on a les deux équations déterminant les nombres N_v et N_b

$$N_j \lambda_{j_1} = N_v \lambda_v + y_B \lambda_v - y_E \lambda_v = N_b \lambda_b + (y_B - z_B) \lambda_v - (y_E - z_E) \lambda_v$$

où N_v et N_b doivent être des nombres entiers. Admettant divers nombres entiers ne différant que de peu d'unités de 3306 comme valeurs de N_j il résultera diverses valeurs de N_v et de N_b . Voici les résultats de ce calcul:

$N_j = 3303$	3304	3305	3306	3307	3308	3309
$N_v = 3489,76$	3490,81	3491,87	3492,92	<u>3493,98</u>	3495,03	3496,09
$N_b = 4372,69$	4374,01	4375,34	4376,66	<u>4377,98</u>	4379,21	4380,63

La vraie valeur de N_j devant être égale à un des nom-

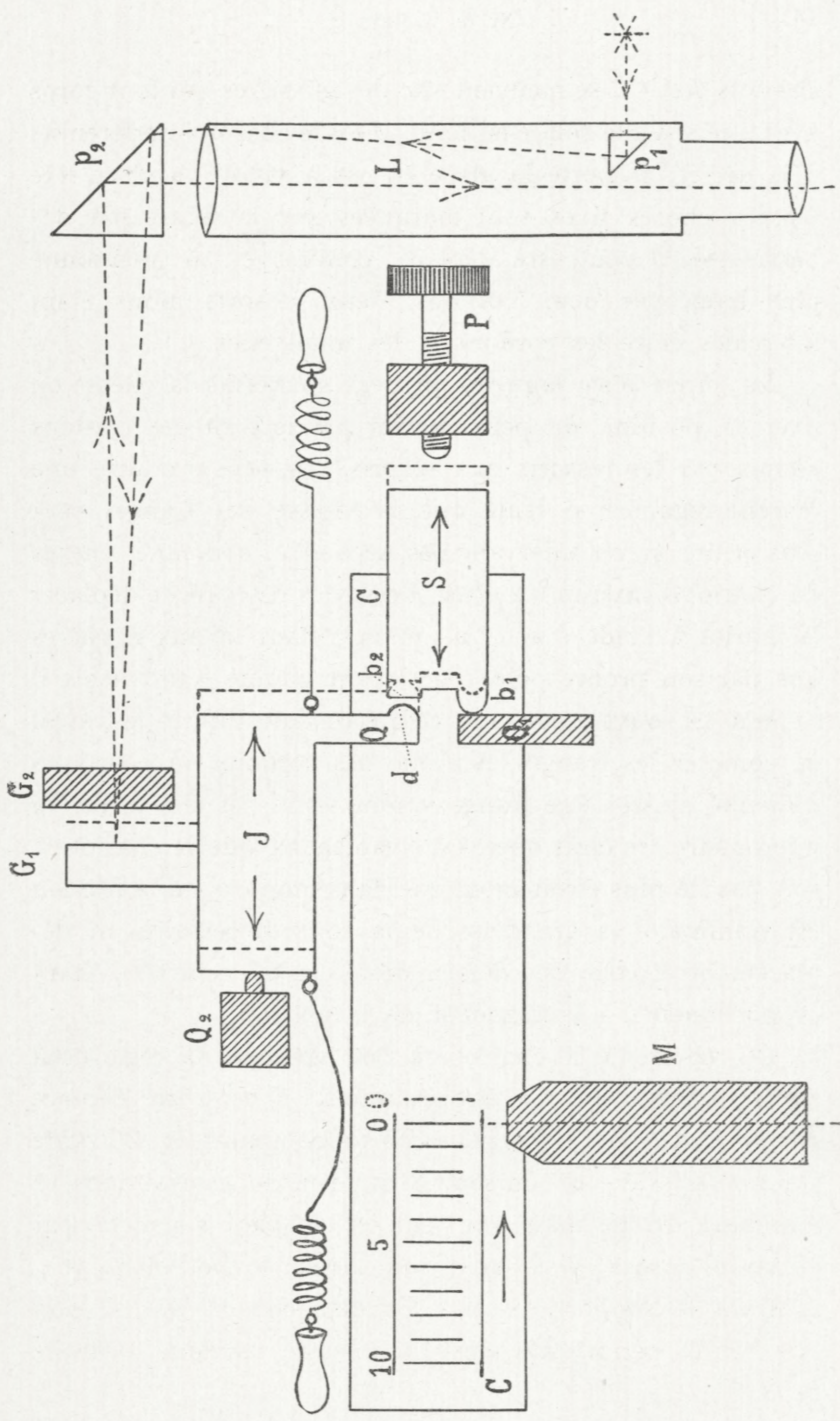
bres donnés dans la table, la seule valeur possible de N_v est 3494; on doit donc admettre

$$N_v = 3494.$$

Le millimètre étant égal à $1831,254 \lambda_v$ le déplacement d'un mm de la glace mobile aura pour effet que 3662,51 intervalles de franges vertes passent par les fils de la lunette. Je commence l'observation en visant la lunette à la frange verte de la constellation F , la frange zéro; elle se trouve à une distance de 129 intervalles à gauche de la frange verte de la constellation E . Par conséquent on aura le millimètre quand on a déplacé la glace mobile jusqu'à ce que 39,51 intervalles vertes aient passé la frange verte de la constellation B , $129 + 3494 + 39,51$ étant égal à 3662,51. La constellation finale A , se trouvant à 36 intervalles à droite de B , est distante, comme dit plus haut, de $129 + 3494 + 36 = 3659$ intervalles de la constellation zéro; on aura donc le millimètre si l'on dépasse la frange verte de A de 3,51 intervalles. Si l'on veut étalonner un millimètre d'une règle il faut seulement trouver l'excédent e de franges vertes au delà de A , correspondant à un déplacement de la glace mobile égal à ce millimètre; sa valeur sera donc égale à $1 \text{ mm} + \frac{1}{2}(e - 3,51) \lambda_v$.

L'appareil comparateur. La figure 3 représente schématiquement l'appareil dont je me suis servi en développant ma méthode (voir le texte ci-contre). Les deux

Fig. 3. Représentation schématique du comparateur interférentiel. En réalité le chariot J est placé au-dessus de CC ; les milieux de la règle, du chariot J et du curseur S se trouvent en effet dans le même plan vertical. Le prolongement Q n'existe pas, le bouton d étant appliqué directement sur la face antérieure de J . Q_1 représente la partie antérieure de la semelle de J ; le bouton b_1 est en réalité placé au-dessous de b_2 . Il va sans dire que l'axe du microscope M est vertical, visant aux traits de la règle.



chariots J et CC se meuvent sur des glissières qui font corps avec une semelle solide en fonte. J est le chariot interférentiel déjà décrit; il porte la glace G_1 vis à vis de la glace fixe G_2 (les choses fixes sont marquées sur la figure par des hachures). J peut être déplacé, comme je l'ai mentionné plus haut, par deux cordons, deux ressorts mous étant intercalés entre les cordons et les manivelles.

La sûreté avec laquelle on peut gouverner la vitesse ou fixer la position du petit chariot par le trait des cordons adouci par les ressorts m'a surpris. On peut produire une marche régulière si lente que la vitesse des franges sera plus petite qu'un intervalle par second c. à d. une vitesse du chariot d'environ $0.2 \mu/\text{sec}$. J'essayais d'abord de déplacer le chariot à l'aide d'une vis; mais n'étant lié aux glissières que par son propre poids et n'ayant qu'une petite masse il se mouvait souvent par sauts ce qui rendait difficile le travail de compter les franges. A l'aide des cordons on peut sans difficulté ajuster une frange voulue entre les deux fils du micromètre. Je crois que c'est avantageux que le chariot ne soit pas lié plus étroitement que dans mon cas où la friction est minimale, la grandeur de la force nécessaire au déplacement et celle des déformations qu'elle entraîne étant proportionnelles à la grandeur de la friction.

CC représente le chariot où l'on applique la règle dont les millimètres doivent être examinés; il peut être déplacé par un long vis; je l'appelle chariot comparateur. CC porte sur une glissière un curseur S qui suit le chariot dans sa marche à droite, mais qui peut être déplacé à gauche par la vis P jusque à ce qu'il soit arrêté, le bouton b_1 rencontrant le support fixe Q_1 . Ce déplacement fini, P doit être retiré, permettant ainsi la marche suivante à droite de S .

Le déplacement du chariot interférentiel est limité à gauche par le support fixe Q_2 et à droite par le bouton b_2 du curseur; la masse du curseur est si grande qu'il ne se déplace pas par la pression douce (130 grammes au maximum) qui se produit quand le bouton d , appliqué sur la face antérieure de J , rencontre la face plane du bouton b_2 ; d et b_2 sont en acier dur, et leurs surfaces sont polies.

L'appareil est préparé pour la recherche de la manière suivante: On déplace J à gauche jusqu'à contact avec le support Q_2 ; on met au point le microscope sur le premier trait de la règle en déplaçant CC ; le curseur S est mis en contact avec le support Q_1 par une pression douce et constante au moyen de la vis P qui est retirée immédiatement après. On a donné aux deux boutons b_1 et b_2 des dimensions telles que, b_1 étant mis en contact avec Q_1 et J avec Q_2 , il n'y a qu'une distance minimale, de 1μ ou à peu près, entre les boutons b_2 et d .

On déplace J lentement à droite en se guidant par la vitesse des franges, jusqu'à contact avec b_2 , de telle manière que la pression ne surpasse pas 130 grammes et qu'elle finisse par cette valeur, la pression finale étant établie en chargeant graduellement, sans choc, par ce poids le cordon par lequel on déplace J ; dans ce but le cordon est mis sur une poulie; quoique J et b_2 soient en acier, l'interférence montre que la position de J dépend sensiblement de la pression.

J ayant ainsi occupé sa position initiale on vise par la lunette la frange verte de la constellation zéro (F dans la fig. 2) qui se présente toujours dans le champ de la lunette quand on a fait l'opération décrite. On vise par le microscope M au trait-zéro de la règle, et cela fait, on déplace le chariot CC jusqu'à ce que le microscope vise au trait de

1 mm; puisque le curseur S suit le mouvement de CC on aura copié le premier millimètre par la distance entre les boutons b_2 et d avec l'exactitude dont l'observation microscopique est capable.

On finit l'opération en déplaçant le chariot J à droite, d'abord relativement vite; on ne voit pas alors les franges qui s'effacent à cause de la vitesse de leur mouvement, mais averti sur la proximité de la treizième coïncidence dans la bande jaune¹ on ralentit le mouvement de J à un tel degré qu'on peut suivre le passage des franges; on finit par un passage lent jusqu'à ce qu'on voie les franges s'arrêter à cause du contact rétablie entre J et b_2 , s'assurant comme mentionné plus haut que la pression ne surpasse pas les 130 grammes et qu'elle finit par cette valeur. On détermine par jugement, en fraction d'intervalle des franges, la distance entre le fil de la lunette et la frange verte qui se trouve à gauche du fil. Les lignes pointillées dans la figure signifient les positions finales de J et de S , ainsi que du trait zéro de la règle.

Je suppose le millimètre examiné par exemple trop grand; alors on trouvera la constellation finale (A dans la fig. 2) à gauche du fil, et on déplace le chariot J assez lentement pour pouvoir compter le nombre n d'intervalles de franges vertes passant le fil de la lunette, jusqu'à ce que la frange verte de A atteigne le fil. On a donc, selon p. 12, α signifiant la fraction observée, le millimètre examiné égal à $1 \text{ mm} + \frac{1}{2}(n + \alpha - 3,51)\lambda_v$.

¹ Jusqu'ici deux observateurs ont été occupé, l'un au microscope, l'autre à la lunette; le premier a servi en outre un autre microscope par lequel il observe la marche des traits d'un millimètre divisé en dixièmes et appliqué sur la garniture de la glace mobile, et par là avertissant l'autre observateur de la proximité de la treizième coïncidence. On pourra se passer de cette opération en appliquant un contact électrique avertisseur.

Si la position de la frange zéro n'est pas commode pour le pointage on vise à une frange rapprochée; et si celle-ci est située à n_0 intervalles à droite de la frange zéro on aura le millimètre égal à

$$1 \text{ mm} + \frac{1}{2} (n - n_0 + \alpha - 3,51) \lambda_v.$$

En réalité on ne met pas, comme supposé plus haut, le microscope exactement au point pour les traits de la règle; on place avec plus de profit l'image du trait près du fil du microscope, mesurant par le micromètre l'écart et répétant le mesurage quelques fois.

Ayant fini les observations concernant le premier millimètre on ramène le chariot J jusqu'à contact avec Q_2 et le curseur S au contact avec Q_1 , tandis que CC garde sa position. Le microscope visant toujours au second trait, tout est prêt pour examiner le deuxième millimètre, et ainsi de suite. Dix millimètres peuvent sans peine être examinés ainsi pendant 30 à 35 minutes.

Si l'on veut étalonner un centimètre sans s'occuper des millimètres on procède comme décrit plus haut pour les millimètres, seulement on se passe des mesures micrométriques pour tous les traits à l'exception du premier et du dernier. Un centimètre peut être étalonné pendant 20 à 25 minutes.

Afin de contrôler le parallélisme des directions de marche des deux chariots CC et J , j'ai fixé sur CC un microscope, dirigé dans le sens de la longueur de CC , et sur J un millimètre divisé en dixièmes placé en face de l'objectif du microscope. Ayant visé à un trait on déplace J d'un mm et après on déplace CC jusqu'à ce que le même trait paraisse nettement dans le microscope. Observant le déplacement que l'image du trait a subi par rapport au fil du

microscope on peut trouver l'angle α formé par les deux directions de marche; pour cette raison on fait deux observations, ayant les traits d'abord verticaux et ensuite horizontaux. Les observations ont donné la valeur de l'angle $\alpha = 0,0036$.

Lesdites deux directions n'étant pas parfaitement parallèles, le point où le bouton d rencontre la face plane de b_2 n'est pas la même à la fin du mouvement qu'au commencement. Il en résultera une erreur si le plan de b_2 n'est pas perpendiculaire à la direction de marche de S . Dans la fig. 4 AA_1 et AA_2 représentent les directions de marche de J et de CC respectivement, FG et F_1G_1 sont les lignes où le

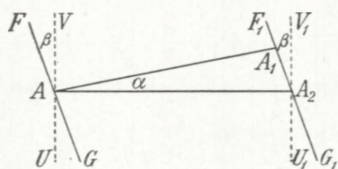


Fig. 4.

plan de l'angle $A_1AA_2 = \alpha$ coupe la face plane du bouton b_2 dans les positions respectivement initiale et finale de b_2 . VU et V_1U_1 sont perpendiculaires à AA_2 dans le plan de α . A et A_2 sont les points de contact initial et final entre d et b_2 . L'angle VAF étant nommé β on a avec une approximation suffisante, α et β étant des angles très petits,

$$AA_2 = AA_1 - AA_1\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha\beta\right).$$

J'ai déterminé l'angle ϑ entre la direction de marche de S et la normale à la face polie de b_2 , en observant la direction de la normale au moyen des images réfléchies par la face; j'ai trouvé ϑ de la même ordre de grandeur que α . Si l'on calcule β , les deux petits angles α et ϑ étant donnés, on trouve que β est petit de deuxième ordre; par conséquent le membre $\alpha\beta$ dans la formule donnée plus haut est négligeable; on pourra donc mettre

$$AA_2 = AA_1(1 - \frac{1}{2}\alpha^2).$$

Il en résulte, α étant égal à 0,0036, qu'il faut faire une correction de $-0,007\mu$ sur les mm et de $-0,07\mu$ sur les cm mesurés par l'appareil.

En développant ma méthode je me suis servi des appareils qui étaient à ma disposition dans mon laboratoire, spécialement de deux machines à diviser. La semelle de la plus grande a servi de base à l'appareil; la plus petite (machine à diviser de la Société Genevoise d'Instruments de Physique) a fourni le chariot *CC* et sa semelle. Le chariot interférentiel *J* et sa semelle ont été construits spécialement pour la méthode. Voici les dimensions de *J*: longueur 4,8 cm, largeur 3,5 cm et hauteur 1,4 cm. Comme je l'ai dit plus haut il n'est lié à sa semelle que par son propre poids; de cette circonstance et de son mince poids dépend la sûreté avec laquelle on peut diriger son mouvement par le simple moyen de deux fils dans lesquels on a intercalé des ressorts mous. Il en résulte qu'on pourra construire pour cette méthode un instrument à un prix modéré et selon mes expériences plus apte pour son but que si le chariot interférentiel fût déplacé comme à l'ordinaire par des vis.

Je suis bien obligé à Monsieur Johs. Olsen qui m'a assisté pendant tout le travail; c'est lui qui a fait ordinairement les observations micrométriques tandis que j'ai fait moi-même les observations des franges d'interférence. L'habileté et les soins de M. Olsen ont beaucoup contribué au résultat satisfaisant que j'ai obtenu. Nous avons examiné une règle en laiton long de six centimètres et portant ses divisions sur une bande d'argent; elle a été fournie par la Société Genevoise d'Instruments de Physique.

Les deux tableaux suivants donnent un extrait du journal des observations relatives à l'intervalle de 40—50 mm de la règle. Le premier tableaux contient tous les nombres

Heures, 10 novembre 1920	Divisions observées dans le Micro- scope	Tem- pé- ra- ture	Observations appartenant aux rangées inter- férentielles			Lisages T du tambour. Une division cor- respond à $0,72\mu$					Moy- ennes des T	Déplacements dé- terminés		Correc- tions des Inter- valles de la règle	Corrections provenant de deux autres séries d'observa- tions		Moy- ennes des cor- rec- tions		
			n_0	ϵ	n	mm	mm	μ	μ	μ		μ							
...	50	3,0	1,0013	1,0019	+0,6	0,9	0,9	0,8
12h 33m	49	17,20	2	0,3	13	4,8	0,9989	0,9999	+1,0	0,4	0,5	0,6
38	48	20	3	2	5	3,3	0,9990	0,9997	+0,7	1,0	1,0	0,9
42	47	30	2	4	4	1,8	0,9990	0,9990	+0,7	2,0	2,0	0,9
46	46	31	1	3	1	2,2	0,9990	0,9991	+0,1	0,6	0,6	0,2
51	46	31	1	3	1	1,2	1,0039	1,0046	+0,7	0,6	0,7	0,7
45	45	32	1	4	21	5,8	0,9999	1,0046	+0,6	5,9	5,9	0,7
44	44	38	1	4	6	6,0	1,0001	1,0005	+0,2	5,8	5,8	1,0
43	43	40	1	5	5	6,1	1,0013	1,0027	+1,4	5,9	5,9	0,7
03	42	42	1	6	3	4,8	0,9993	0,9998	+0,5	4,9	4,9	0,4
07	41	46	1	4	14	6,7	1,0013	1,0027	+1,4	6,7	6,7	0,9
10	40	17,48	1	0,0	5	6,6	1,0000	1,0001	+0,1	6,7	6,7	0,8
...	50	4,8	cm	cm	μ	μ	μ	μ
1h 34m	49	17,60	4	0,8	9	4,8
37	48	60	2	0,0	6
39	47	60	2	0,4	12
42	46	61	1	0,3	7
45	45	62	1	0,9	4
48	44	63	1	0,5	8
52	43	63	1	0,2	2
54	42	63	1	0,9	11
58	41	65	1	0,2	4
60	40	68	1	0,4	8	5,4

Valeur du centimètre 4—5

Valeurs des dix millimètres 40—50

observés d'une série d'observations qui ont servi pour la détermination des valeurs des dix millimètres; l'autre contient les nombres desquels résulte la valeur entière du centimètre quand on la détermine sans avoir égard aux traits des millimètres intermédiaires. La colonne numéro 14 donne les corrections des intervalles résultant des observations. J'ai ajouté deux colonnes numéros 15 et 16, donnant les corrections résultant d'autres séries d'observations. Il résulte des nombres des quatre dernières colonnes que les millimètres sont déterminés avec une erreur moyenne de $0,28 \mu$.

Le tableau suivant contient dans la deuxième colonne les valeurs des six centimètres déterminés directement et dans la troisième les sommes des valeurs trouvées des dix millimètres de chaque centimètre. Pour le centimètre 2—3

Centimètres de la règle	Valeurs directement trouvées	Les sommes des dix subdivisions	Différences
0—1	1,00073 cm	1,00063 cm	+ 1,0 μ
1—2	085	081	+ 0,4
2—3	102	108	— 0,6
3—4	069	096	— 2,7
4—5	066	059	+ 0,7
5—6	1,00079	1,00062	+ 1,7

j'ai trouvé en outre une valeur de 1,00046 cm; le grand écart de cette valeur doit être attribué à une grosse erreur due à un manque d'attention. Les valeurs des différences entre les nombres des deux colonnes correspondent aux valeurs des erreurs moyennes des nombres.

S'il s'agit de l'étalonnage d'une règle de précision longue d'un mètre je proposerai qu'on le fasse de la manière suivante. La longueur totale et la position de chacun des traits de décimètre relative aux traits extrêmes seront déterminées comme à l'ordinaire sur le comparateur. Quant aux autres traits il faudra déterminer dans les intervalles

de décimètre la position des traits de centimètre par la méthode interférentielle, et, de même la position des traits de millimètre dans les intervalles de centimètre. En outre il faudra répéter pour un des décimètres la détermination de ses dix centimètres tant de fois qu'on finira par obtenir leur somme déterminée avec la même exactitude qu'a donnée l'examination sur le comparateur; par là on obtiendra le contrôle nécessaire de la concordance entre les deux différentes méthodes métriques employées. Peut-être voudra-t-on pour ce but déterminer directement les deux demi-décimètres par l'interférence de la même manière que les centimètres sans s'occuper des positions des traits intermédiaires entre les deux traits extrêmes.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7. RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrenes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse »NH ₂ COONH ₄ + H ₂ O ⇌ (NH ₄) ₂ CO ₃ « und »CO ₂ + H ₂ O ⇌ H ₂ CO ₃ «. 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922.....	0.60
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922.....	0.70
6. PRYTZ, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922 ..	0.75
7. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922	2.15
8. BØGGILD, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). (Under Pressen).....	
9. WIEDEMANN, E. und FRANK, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922	0.75
10. PEDERSEN, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. (Under Pressen)	



Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 7.

ON THE LICHTENBERG FIGURES

PART II.

1. THE DISTRIBUTION OF THE VELOCITY IN
POSITIVE AND NEGATIVE FIGURES
2. THE USE OF LICHTENBERG FIGURES FOR THE
MEASUREMENT
OF VERY SHORT INTERVALS OF TIME

BY

P. O. PEDERSEN

WITH TWO PLATES



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 2,15.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 7.

ON THE LICHTENBERG FIGURES

PART II.

1. THE DISTRIBUTION OF THE VELOCITY IN
POSITIVE AND NEGATIVE FIGURES
2. THE USE OF LICHTENBERG FIGURES FOR THE
MEASUREMENT
OF VERY SHORT INTERVALS OF TIME

BY

P. O. PEDERSEN

WITH TWO PLATES



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Introduction.

In Chapter IV of Lichtenberg Figures Part I¹ we have described a method for the measurement of the spreading-velocity of the positive and negative Lichtenberg figures, and the method was there used in determining the mean values of these velocities in the neighbourhood of the electrodes. In Chapter VII it was, furthermore, pointed out how a similar method may be used for the measurement of time-lag in electric sparks.

Since then we have carried out a rather lengthy investigation on this question, viz. time-lag in electric sparks, the results of which will be published elsewhere. In the course of this investigation it was found desirable to investigate how the spreading-velocity varies from the electrode, where the velocity is greatest, to the final boundary of the figure, where it is zero. It was also found necessary to make a closer study of the theory of these measurements and especially to investigate the possible errors introduced by sloping wave fronts. The results of our investigation of these two questions are presented in the present paper.

The main problem to be solved may be stated as follows: A Lichtenberg figure starts at a certain moment from

¹ P. O. PEDERSEN: On the Lichtenberg Figures Part I. Vidensk. Selsk. Math.-fysiske Medd. I, 11. Copenhagen 1919. In the following referred to as L. F. I.

an electrode and t seconds later its outer boundary has reached to a distance of r cm from the electrode. The described space r will then depend upon the time t , say

$$r = F(t). \quad (\text{I})$$

The function F depends upon the amplitude of the impulse, the nature and density of the gas, the thickness of the photographic plate (P in Fig. 1), and possibly other conditions. The problem is to determine the function F .

This function being known, the velocity U , is given by

$$U = \frac{dF(t)}{dt} = U(t), \quad (\text{II})$$

and the time-interval t corresponding to a known space r may be found by solving (I) with regard to t . We will write this solution in the form

$$t = f(r). \quad (\text{III})$$

On the other hand if (II) or (III) are known we may therefrom deduct the relation (I).

The final range R of the figure will be given by

$$R = F(\infty). \quad (\text{IV})$$

We have determined the relation (I) in two different ways:

- a) By measurements of corresponding values of t and r by means of the method given in L. F. I. and briefly described in section 1. below.
- b) By deducing the relation (II) mathematically from the shape of the separating line between two figures originating from straight electrodes. The details of this method are given in section 2. below.

In section 3. it is proved that the results obtained by means of a) and b) agree with each other.

Section 4. treats of the influence of sloping wave fronts, section 5. discusses some details with regard to the shape of the separating line, and section 6. contains some concluding remarks.

1. The Method used for the Measurement of Corresponding Values of the Time t and Space r in Relation (I).

The method used for these measurements is indicated in Fig. 1. E is a small influence machine, connected to the

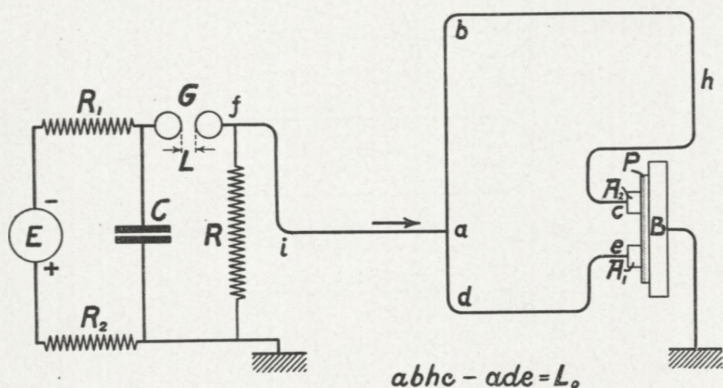


Fig. 1. Diagram of Circuit used for the Measurement of Corresponding Values of t and r in Formula (I).

condenser C through two large resistances R_1 and R_2 , f , inst. two slate pencils. G is the primary spark gap, A_1 and A_2 two electrodes, the shape and relative position of which are shown in Fig. 2. A_1 and A_2 are placed on the sensitive film of a photographic plate P , resting on a metal plate B connected to earth. A wire $f i a$ connects the primary spark gap with the point a of the loop $edabc$ connecting A_1 and A_2 , and the length of the wire $abc-hde$ is L_0 meters longer than ade . One terminal of the condenser

C is connected directly to earth, the wire system and the electrodes A_1 and A_2 through the large resistance R .

In order to make a measurement the handle of the influence machine is slowly turned until a spark passes the spark gap G . An electric impulse or wave will then

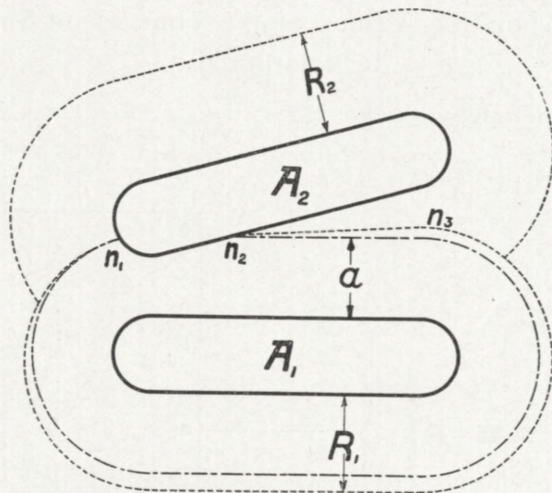


Fig. 2. Shape and Relative Position of the Lichtenberg Electrodes A_1 and A_2 in Fig. 1.

travel out along the wire fia , and at the point a this impulse is partly reflected and partly transmitted into the wires ab and ad . The reflected wave is travelling back along the wire aif , and the two transmitted waves travel respectively along the wires $abhac$ and ade . If the impulse impedances of the three wires meeting in the point a are equal, the amplitude of the reflected impulse will be $-\frac{1}{3}V_0$, while that of the transmitted impulses will be $\frac{2}{3}V_0$, the amplitude of the incident impulse being denoted by V_0 .

Of the two transmitted impulses that one travelling along the wire ade will reach the electrode A_1 t_0 seconds

before the impulse travelling along $abhc$ reaches the electrode A_2 , where

$$t_0 = \frac{L_0}{v} = \frac{L_0}{3 \times 10^8}, \quad (a)$$

the wire $abhc$ being L_0 meters longer than ade . It is supposed that the impulses travel with a velocity v equal to that of light. In reality the velocity will be a little smaller, and t_0 determined by means of (a) therefore comes out too small; but if the wires are not too close to other conductors this error will only be relatively unimportant.

The Lichtenberg figure originating from A_1 will therefore start t_0 seconds before a corresponding figure starts from A_2 . The first figure has therefore spread over a space a (see Fig. 2) before a figure starts from A_2 . The two figures will meet along a line n_2n_3 , the separating line, of which it is proved later on, that that part which is situated between the straight edges of the electrodes A_1 and A_2 generally is also very nearly a straight line. This straight part of the separating line starts from the point n_2 on the edge of A_2 , and the distance from n_2 to the edge of A_1 is equal to the distance a travelled by the figure from A_1 in t_0 seconds. In this way corresponding values of the two variables in formula (I) are determined.

2. Impulses with Extremely Steep Front, Shape and Position of Separating Line.

We shall now consider how the position and shape of the separating line depends upon the function U in formula (II). In order to simplify our consideration we suppose, for the present, that the fronts of the impulses arriving at the electrodes A_1 and A_2 are extremely steep. We may then

indicate the velocities of the figures spreading from A_1 and A_2 by means of the curves $U_1(t)$ and $U_2(t)$ shown in Fig. 3, I. The velocity U_1 starts at the time $t = 0$

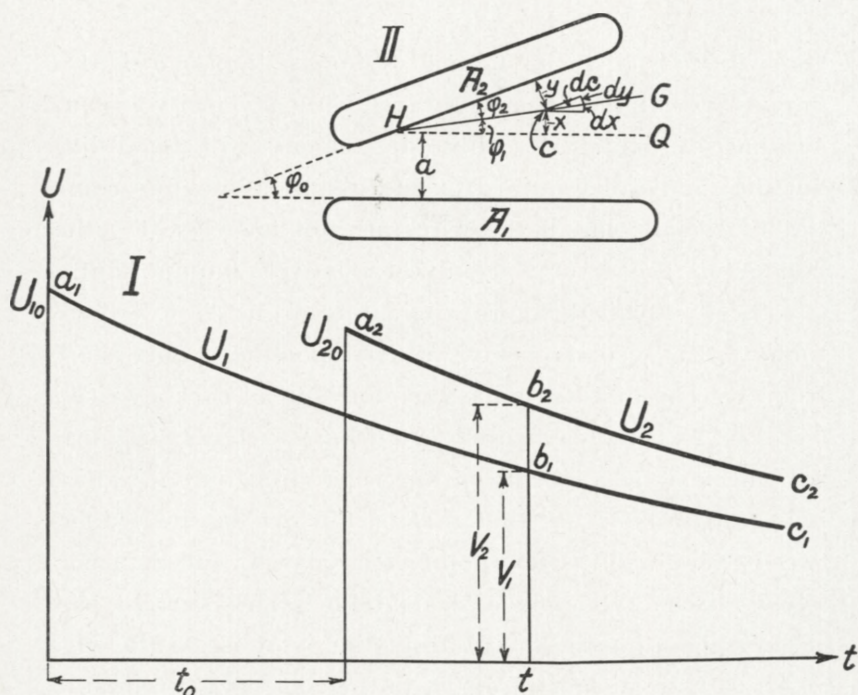


Fig. 3. Part I: Velocity Curves U_1 and U_2 for Figures spreading from respectively A_1 and A_2 , the Figure from A_1 starting t_0 seconds before that from A_2 .

Part II: Position of the Electrodes A_1 and A_2 and of the Straight Part HG of the Separating Line.

with the initial velocity U_{10} , and U_2 at the time $t = t_0$ with the velocity U_{20} .

At the moment the figure starts from A_2 the outer boundary of the figure from A_1 will be at a distance a from the edge of A_1 , where

$$a = \int_0^{t_0} U_1 \cdot dt. \quad (1)$$

The separating line starts at the point H on the edge of

A_2 just reached by the figure from A_1 at the moment the figure from A_2 starts (see Fig. 3, II). The distance of H from the edge of A_1 is therefore equal to a .

Later on it will be proved that that part HG of the separating line which is lying between the straight edges of A_1 and A_2 is also a straight line for all values of the time interval t_0 .

We shall now consider the mathematical consequences of this straightness of the separating line with regard to the possible forms of the velocity function U .

Let dc be an element of the straight separating line (see Fig. 3, II), we have then with the symbols used in the figure:

$$dx = dc \cdot \sin \varphi_1, \quad \text{and} \quad dy = dc \cdot \sin \varphi_2.$$

At the same time we have

$$dx = U_1 \cdot dt, \quad \text{and} \quad dy = U_2 \cdot dt,$$

dt being the time it takes to form the element dc of the separating line while U_1 and U_2 are the instantaneous values of the two velocities at the moment t .

We have accordingly

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{U_2}{U_1} = k, \quad (2)$$

where k is a constant.

Equation (2) may be written

$$U_2(t) = k \cdot U_1(t). \quad (3)$$

If, instead of the time interval t_0 we choose $t_0 + dt$, the separating line will also be straight, but the corresponding constant k will have a different value k' dependent upon dt but independent of t . We may therefore write

$$k' = k(1 + \alpha dt),$$

where α is a constant.

Instead of (3) we get

$$U_2(t-dt) = k' \cdot U_1(t). \quad (4)$$

From (3) and (4) it is easily deduced that

$$\frac{dU_2}{U_2} = -\alpha \cdot dt,$$

or

$$U_2(t) = U_2' \cdot e^{-\alpha t} = U_{20} \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad (5_1)$$

and therefore

$$U_1(t) = U_{10} \cdot e^{-\alpha t}, \quad (5_2)$$

the value of the constant k being

$$k = \frac{U_{20}}{U_{10}} \cdot e^{\alpha t_0}. \quad (5')$$

When the separating line is straight, the velocity functions must necessarily be those given in (5₁) and (5₂) in which U_{10} , U_{20} , and α are constants. And vice versa with these velocity functions the part of the separating line under consideration will always be straight.

It follows from equation (5₂) that

$$r = F(t) = \int_0^t U_1 \cdot dt = \frac{1}{\alpha} \cdot U_{10} \cdot (1 - e^{-\alpha t}), \quad (6)$$

and the range

$$R_1 = \frac{1}{\alpha} U_{10}, \quad (7)$$

or

$$U_{10} = \alpha R_1. \quad (7')$$

Equations (6) and (5₂) may therefore be written :

$$r = F(t) = R_1(1 - e^{-\alpha t}), \quad (8)$$

and

$$U_1 = \alpha(R_1 - r) = U_{10} - \alpha r. \quad (9)$$

The velocity decreases linearly with increasing distance from the edge of the electrode.

We shall next determine how the angle φ_2 between the separating line and the electrode A_2 depends upon the

ratio of the velocities and on the angle $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$ between A_1 and A_2 .

We evidently have (see Fig. 3, II):

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = \frac{U_2(t)}{U_1(t)} = \frac{U_{20}}{U_{10}} \cdot e^{\alpha t_0} = \frac{U_{20}}{U_{10}} \cdot \frac{R_1}{R_1 - a} = c \cdot \frac{R_1}{R_1 - a}, \quad (10)$$

where $c = \frac{U_{20}}{U_{10}}$ is the ratio between the velocities just at the edges of the electrodes, and a is the distance travelled in t_0 seconds by the figure originating from A_1 .

Supposing the angles φ_1 and φ_2 are so small that in formula (10), without any serious error, we may substitute φ_1 and φ_2 for respectively $\sin \varphi_1$ and $\sin \varphi_2$, this formula is then reduced to

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \varphi_0 \frac{a - (1-c)R_1}{(1+c)R_1 - a}. \quad (10_1)$$

The angle φ_2 is then given by

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \Delta\varphi). \quad (11)$$

If $U_{10} = U_{20}$, ($c=1$), equation (10₁) reduces to

$$\Delta\varphi = \varphi_0 \frac{a}{2R_1 - a}. \quad (10_2)$$

In the following the formulae (11) and (10₁) or (10₂) are used for the calculation of the angle between the separating line and A_2 .

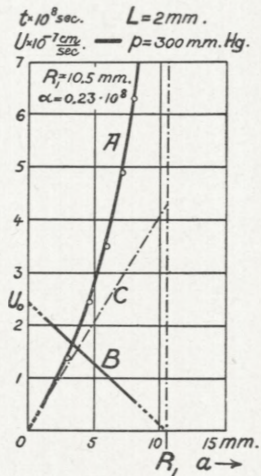


Fig. 4. Negative Figures.
 $L = 2 \text{ mm};$
 Pressure $p = 300 \text{ mm Hg.}$
 $R_1 = 10.5 \text{ mm};$
 $\alpha = 0.23 \times 10^8.$

3. Experimental Proof by Means of the Method described in Sect. 1 of the Velocity Functions deduced in Sect. 2.

In Figs. 4—6 the points indicated by small circles represent corresponding values of a and t_0 determined by the method described in sect. 1, while the curves marked

A represent the theoretical relationship between α and t_0 according to equation (8), viz.:

$$\alpha = R_1(1 - e^{-\alpha t_0}).$$

The value of R_1 is measured directly on the photographic plate, while for α we have chosen such a value

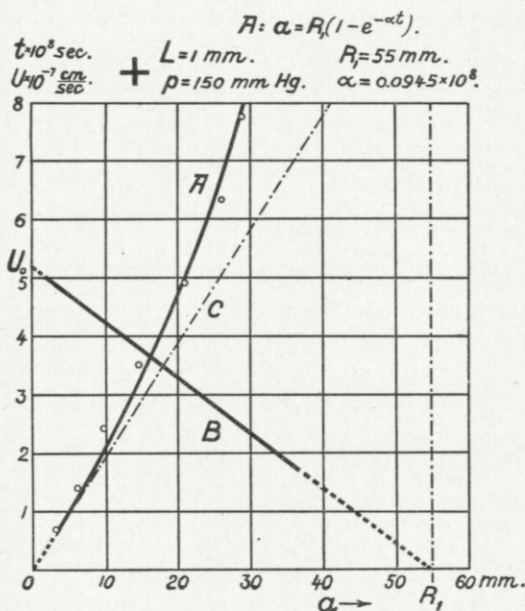


Fig. 5. Positive Figures: $L = 1 \text{ mm.}$
 $p = 150 \text{ mm. Hg.}$; $R_1 = 55 \text{ mm.}$
 $\alpha = 0.0445 \times 10^8.$

that the experimental points fall as closely as possible to the curve A.

Taking into account that there is only one arbitrary constant, namely α , the value of which can be chosen so as to accommodate the theoretical and the experimental values as much as possible, we may say that the results obtained by the two methods agree very well with each other.

In Figs. 4—6 the straight lines B represent the spreading-velocity of the figures at different distances from the electrodes according to formula (9). The equation of those lines is therefore

$$U_1 = \alpha(R_1 - a) = U_{10} - \alpha a. \quad (9')$$

The broken lines C represent the tangents to the A -curves at the origin.

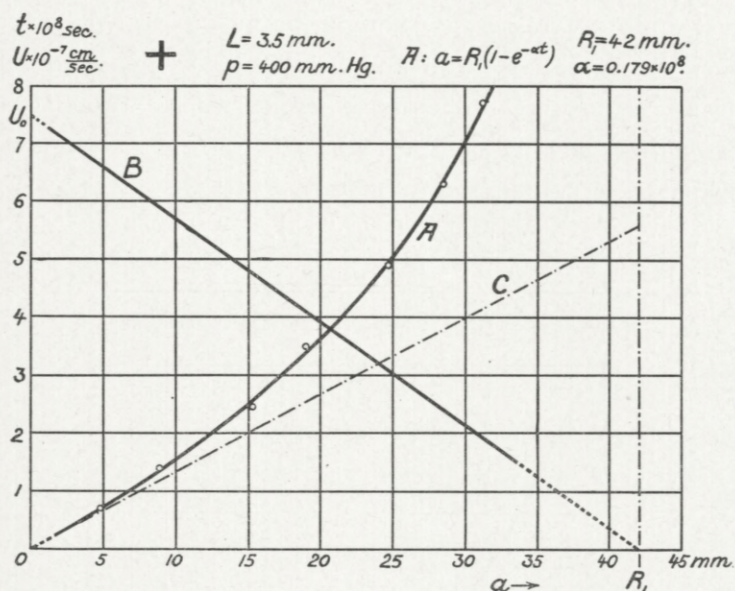


Fig. 6. Positive Figures. $L = 3.5 \text{ mm}$; $p = 400 \text{ mm Hg.}$; $R_1 = 42 \text{ mm}$;
 $\alpha = 0.179 \times 10^8$.

In Fig. 7 the curve D represents the velocity function corresponding to the A -curve in Fig. 5.

The outermost parts of the velocity lines B in Figs. 4—6 and D in Fig. 7 are shown in broken lines and are only to be considered as theoretical extrapolations. It is hardly probable that the velocity goes down quite to zero, but the reduction in the range caused hereby is probably small.

Besides the experiments, of which the results are given in Fig. 4—6, we have made a number of other investigations aiming at the determination of the dependence of α upon spark length, gas pressure etc.

The results of these investigations are shown in Figs. 8 and 9 for positive and negative figures respectively. The values of α seem in both cases to be rather independent of the spark length but to increase linearly with increasing

pressure of the gas and much more rapidly for positive than for negative figures. In both cases the value of α seems to converge towards a definite value — about 0.075×10^8 for positive and 0.15×10^8 for negative figures — when $p \rightarrow 0$.

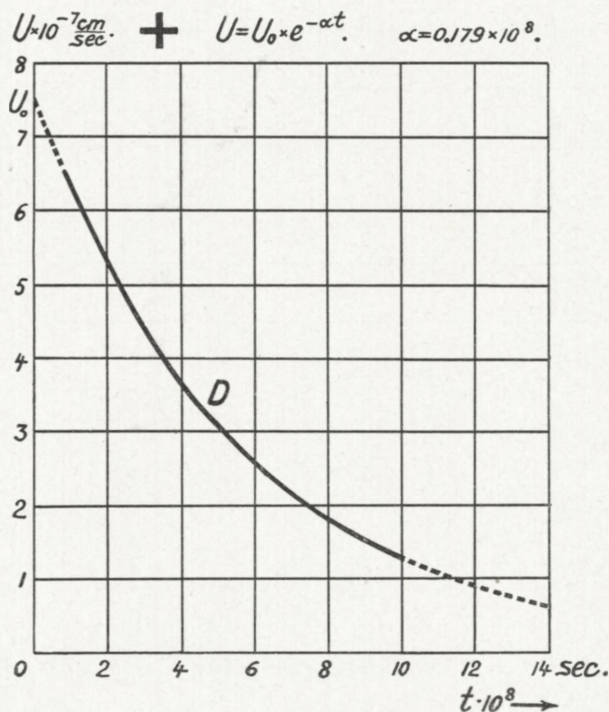


Fig. 7. Theoretical Velocity Curve corresponding to Curve A in Fig. 5.

In the upper parts of Figs. 8 and 9 are also shown the corresponding values of the range R and the initial velocity V_0 . In most cases the ratio between gas pressure and spark length (both in mms.) has been equal to 100. Where this is not the case a number at the experimental point gives the value of that ratio. The curves marked R and U_0 give — for the said ratio equal to 100 — an approximate repre-

sensation of the range and the velocity as depending upon the pressure of the gas.

According to the evidence given on the preceding pages

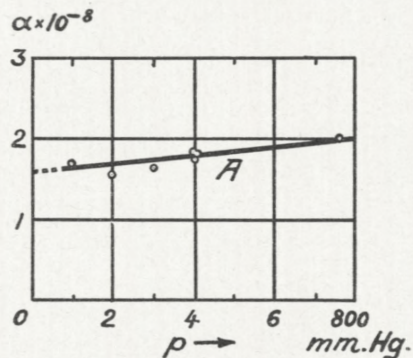
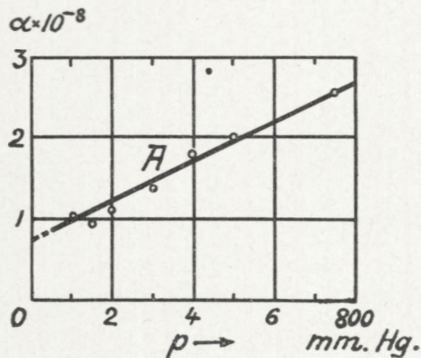
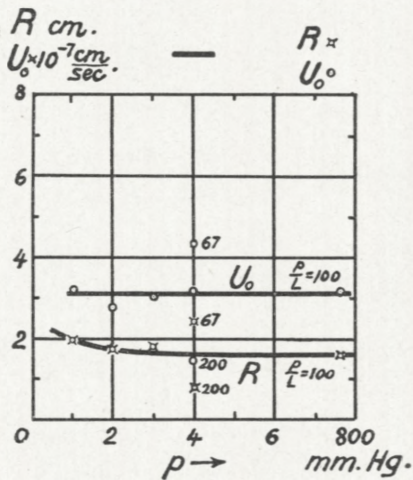
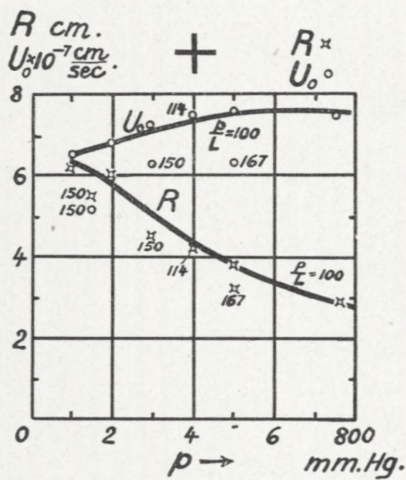


Fig. 8. Positive Figures. The values of the Coefficient α , the Range R and the initial Velocity V_0 as dependent upon the Pressure p and Spark Length L .

Fig. 9. Negative Figures. [In the lower parts of Figs. 8 and 9 the Ordinates are $\alpha \cdot 10^{-9}$ and not $\alpha \cdot 10^{-8}$ as indicated in the Figures.]

there can be but little doubt that our solution — represented by the equations (5₂), (8) and (9) — of the problem treated of is substantially correct.

In what follows we shall treat of some possible sources

of errors and their elimination, investigate in some detail the general shape of the separating line and last but not least furnish some experimental evidence of the straightness of the often mentioned part of this line.

Before closing this section it is necessary, however, to make a single remark. The spreading-velocity of the Lichtenberg figures, with which we are dealing here, are by no means the same as the velocities, by which the "sliding sparks" (Gleitfunken) studied by M. TOEPLER¹ extend themselves. It will be shown elsewhere that the two phenomenae, Lichtenberg figures and sliding sparks, differ very much from each other. TOEPLER found—by making use of the velocity of sound waves—that the velocity of a sliding spark is practically constant almost to the end of the spark, and there is hardly any reason to doubt the correctness hereof.

4. The Influence of Sloping Wave Fronts on the Shape of the Separating Line.

We have until now supposed that the wave fronts of the impulses were extremely steep in which case the initial velocity at the edge of the electrodes is also the maximum velocity. Generally, however, the wave fronts are more or less sloping, increasing gradually from zero to the maximum amplitude of the impulse. The velocity will then also increase gradually up to its maximum value U_0 (see Fig. 10 Part III). The duration of the sloping front is in Fig. 10 Part II—IV taken to be equal to τ_0 . The amplitude of the impulse is taken as constant for all values of t greater than τ_0 (see Fig. 10 Part II) and for the same values of t the velocity is supposed to decrease exponentially with t .

¹ M. TOEPLER: Ann. d. Phys. (4) 21, p. 193—222, 1906.

We now extend this exponential velocity curve backwards to the point d_1 , which is chosen in such a way that the two shaded areas, $o_1e_1b_1$ and $b_1d_1c_1$ are equal. The velocity corresponding to the point d_1 is denoted by U_0 and

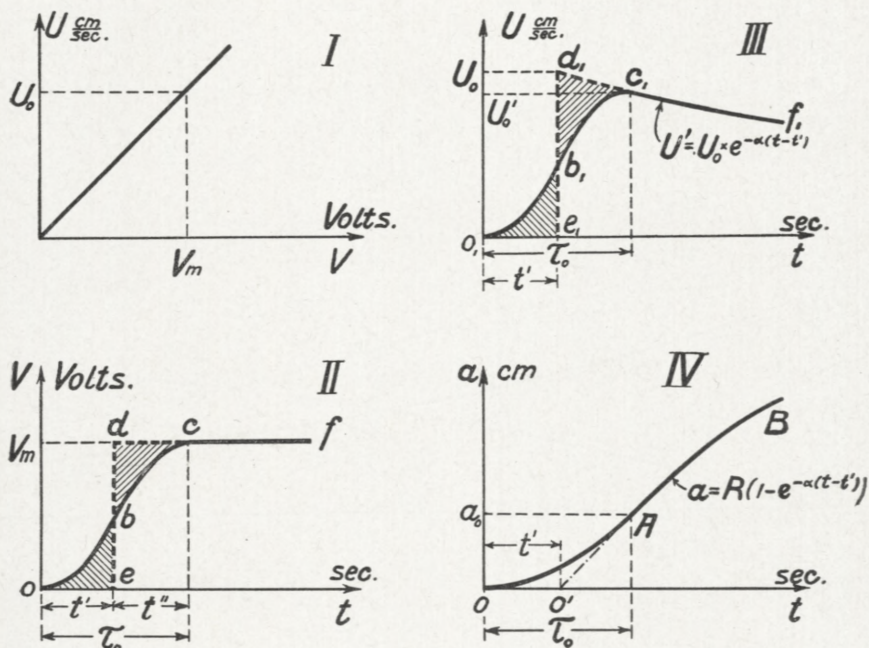


Fig. 10. The straight Line in Part I represents a Linear Relationship between the Velocity at the Edge of the Electrode and the Voltage of same.

In Part II the Line $obcf$ represents the Front of an Impulse. The curve $o_1b_1c_1f_1$ in Parts III represents the Corresponding Velocities.

The curve OAB in Part IV represents the Distance travelled by the Outer boundary of the Figure in the Time t .

we call the curve $d_1c_1f_1$ the equivalent velocity curve, the equation of which is

$$U' = U_0 \cdot e^{-\alpha(t-t')} \quad [U' = 0 \text{ when } t < t']. \quad (b)$$

The distance a which the outer boundary has reached in the time t is given by

$$a = \int_0^{t_0} U \cdot dt, \quad (c)$$

and for all values of t_0 greater than τ_0 we may in this formula substitute the equivalent velocity U' for the actual velocity U .

In Fig. 11 we have shown two identical velocity curves U_1 and U_2 with a time interval of t_0 seconds and the corresponding distances r_1 and r_2 travelled by the figures from A_1 and A_2 . It will presently be shown that what is measured on the photographic plate is the time interval

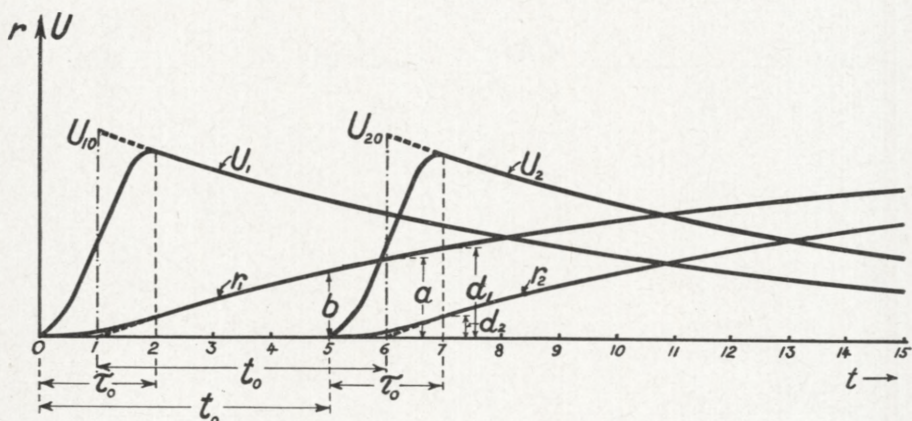


Fig. 11. Two identical Velocity Curves U_1 and U_2 with a Time Interval of t_0 and the Corresponding Distance Curves r_1 and r_2 .

between the step fronts of the equivalent velocity curves. What really is desired is to know the interval between the fronts of the two corresponding electrical impulses. In so far as the two impulses are identical in shape the time interval between the impulses will be exactly equal to the interval between the steep fronts of the equivalent velocity curves. If the two impulses have differently shaped fronts it is perhaps a little doubtful how to define the time interval between them. In this case the most natural way to define this time interval will presumably be the following: The front of the voltage

impulse $obcf$ (see Fig. 10 Part II) is transformed to the "equivalent" voltage curve with vertical front, $ebdcf$, where the position of the vertical front ed is chosen in such a way that the two areas oeb and bdc are equal. The time interval between the two voltage impulses is then taken as the interval between the vertical fronts of the two equivalent voltage impulses. If, as indicated in Fig. 10 Part I, the velocity U is proportional to the voltage V , the time interval between the vertical fronts of the equivalent velocity curves is very nearly equal to the time interval between the vertical fronts of the equivalent voltage impulses. Even in the cases where there is no proportionality between U and V the two time intervals will very nearly be equal. We may, therefore, without serious errors take the time interval between two voltage impulses as the time interval between the vertical fronts of the equivalent velocity curves, and this last interval is, as will be shown shortly, equal to the t_0 measured on the photographic plate. In all cases where the wave fronts of the two impulses are identical in form the error is zero.

In order to illustrate the influence of sloping wave fronts we have in Fig. 12 shown the separating line which would result from the two velocity curves shown in Fig. 11 and with a time interval of $t_0 = 5$. If the wave fronts were vertical the straight part ed of the separating line would be continued to the point c at the edge of A_2 . The sloping of the wave fronts causes the part dc of the separating line to bend down to the position db_2 . The distance of the point b_2 from the edge of A_1 is equal to the distance b travelled by the figure from A_1 at the moment when the figure from A_2 just begins to start (see Fig. 11). The separating line again starts from the edge of A_2

at the point b_1 where the distance from A_1 again is equal to b . From the last point the separating line goes in a bent curve to the point g .

It is very easy by means of the r_1 - and r_2 -curves of Fig. 11 to draw the separating line in Fig. 12 and corresponding distances are marked in the same way in these

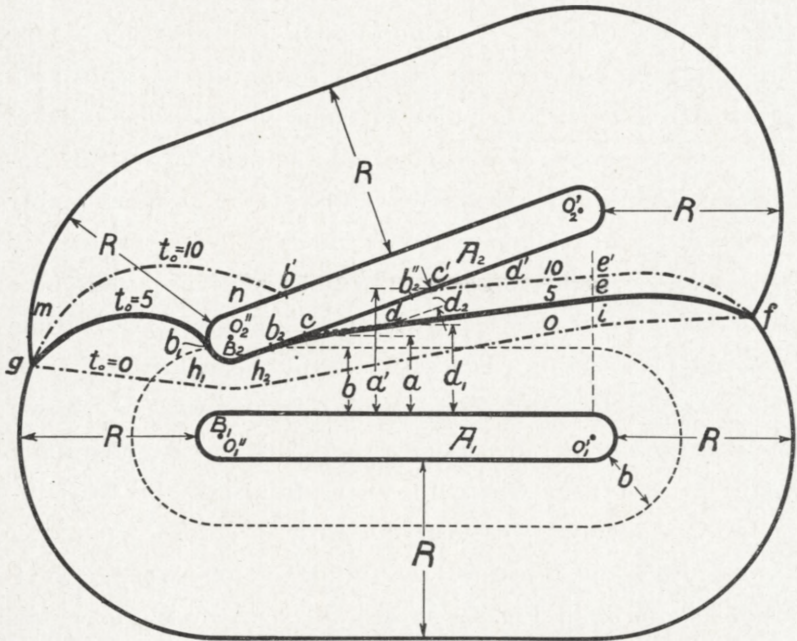


Fig. 12. Two Separating Lines corresponding to the Sloping Wave Fronts of Fig. 11. One for $t_0 = 5$ shown with a Heavy Line, the other, corresponding to $t_0 = 10$, in a broken Line. The final Range R is the same in both Figures.

two figures. Between the points d and e the separating line according to section 2., is a straight line, and, if extended beyond d , this straight line cuts the edge of A_2 in a point c . It is easily seen from Fig. 11 that the distance a of this point c from the edge of A_1 is equal to the distance travelled by the figure from A_1 at the moment,

the figure would start from A_2 if the velocity curve was the equivalent one with vertical front. The distance a is therefore equal to the distance travelled in the time t_0 by a figure spreading out according to the equivalent velocity curve. Such distances a it is which are plotted against the corresponding values of t_0 in Figs. 4—6.

5. The General Shape of the Separating Line. Experimental Proof of the Straightness of Part of this Line.

In Fig. 12 we have — besides the separating line already mentioned — in broken lines shown two other lines based on the velocity curves of Fig. 11 and corresponding to respectively $t_0 = 0$ and $t_0 = 10$. The common ends of all these separating lines will be at the points g and f . For $t_0 = 0$ the outer ends gh_1 and if of the separating line are straight lines passing vertically through the middle points of the two center lines $o'_1 o'_2$ and $o''_1 o''_2$. The part $h_2 i$ of this separating line is also a straight line, namely the bisector of the angle between the edges of A_1 and A_2 . For $t_0 = 10$ the straight part of the separating line is $e' d'$, while a' is the distance travelled by the outer boundary of the figure from A_1 in the time $t_0 = 10$.

In order to compare the theoretical with the actual separating line we have in Figs. 13, and 16—18 reproduced two positive and two negative velocity figures with the theoretical separating lines indicated by broken lines. We shall later on discuss the agreement between the actual and the theoretical separating lines. It is necessary to point out, however, that for such lines as the one shown in Fig. 12 corresponding to $t_0 = 10$ it is impossible for the figure from A_1 to reach the area in the neighbourhood of

n , and the figure from A_2 cannot turn round sufficiently to cover the area at m . The figures from A_2 will therefore cover the area n and the figure from A_1 the area m , as also appears from the Figs. 13, 16 and 18.

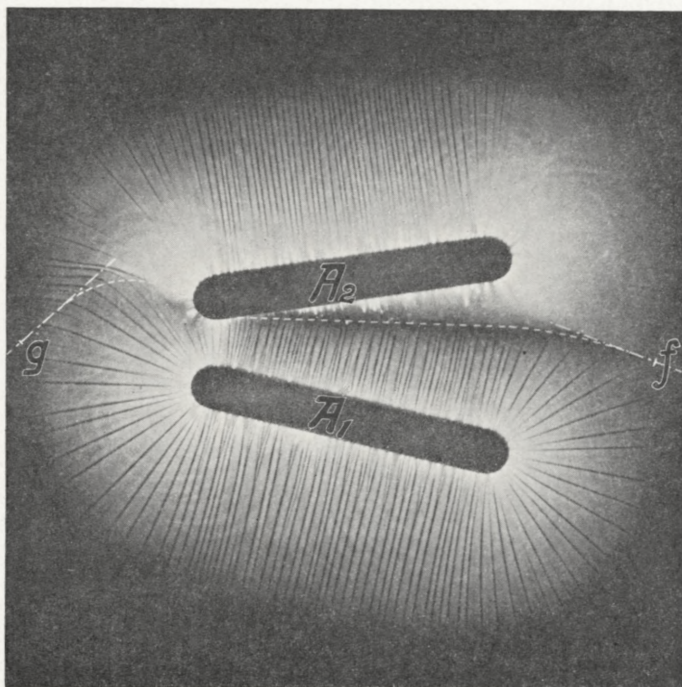


Fig. 13. Negative Velocity Figure. Broken Line shows Theoretical Form of Separating Line.

With negative figures it is impossible to obtain a separating line as that corresponding to $t_0 = 10$ in Fig. 13 without a spark passing between the points B_1 and B_2 on respectively A_1 and A_2 . Such a spark may pass so early that it alters the position of the separating line. In velocity or time measurements by means of negative figures it is, therefore, always necessary to place the electrodes A_1 and A_2 at such a distance from each other that the point

where the separating line reaches the edge of A_2 is rather close to the point B_2 . With positive figures, where the tendency to spark-over is much smaller, the position of A_1 and A_2 is not so critical.¹

The two end points f and g of the separating line (see Fig. 12) deserve a little consideration. Supposing the ratio of the instantaneous velocities of the two figures is known it is easy to determine the direction of the separating line at these points. In Fig. 14 the line fp is vertical to $f o'_1$.

At the time t the figure from A_1 has travelled the distance $R - \Delta r_1$ and the figure from A_2 the distance $R - \Delta r_2$, where R is the final range. The ratio $\frac{\Delta r_2}{\Delta r_1}$ must, according to the equations, (3) and (5₂), be equal to the constant ratio k of the velocities.

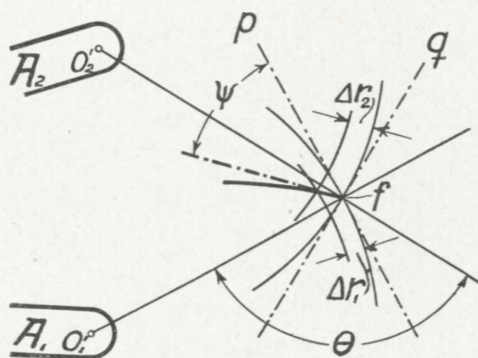


Fig. 14. Direction of the Tangent to the Separating Line in the End Point f .

It is easily shown that the angle ψ between the tangent to the separating line at f and the line fp is determined by

$$\text{tg } \psi = \frac{\sin \theta}{k + \cos \theta}, \quad (12)$$

where θ is the angle between the lines $f o'_1$ and $o'_2 f$.

If the angles ψ and θ are known, the ratio k is given by

$$k = \frac{\sin \theta}{\text{tg } \psi} - \cos \theta. \quad (13)$$

From equation (12) it follows that

¹ This difference between positive and negative figures will be discussed elsewhere.

for $k = \infty, 1, 0$
 we have $\psi = 0, \frac{1}{2}\theta, \theta$.

The correctness of these values is evident.

From equation (8) it follows, that

$$k = e^{\alpha t_0} = \frac{R}{R-a}. \tag{14}$$

That is, the value of the ratio k depends only on the values of R and a .

We have until now supposed that the final ranges R_1 and R_2 of the figures from A_1 and A_2 are equal. Generally that is not the case, R_2 for positive figures being somewhat

smaller and for negative figures considerably greater than R_1 .

Further particulars about this question are to be found in L. F. I p. 32—33 and need not be discussed here. It is sufficient to point out that the position of the point c in Fig. 12 — and therefore the measured value of a — depends

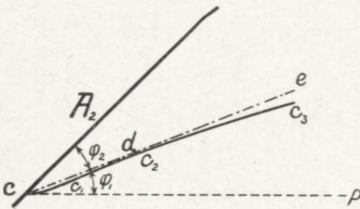


Fig. 15. ec Theoretical Separating Line. $cc_1c_2c_3$ Actual Separating Line deformed by the Electric Field from the Charge on A_2 and its Figure.

solely on the velocity (and range) of the figure from A_1 . If, however, $R_1 \neq R_2$, the position of the points f and g are changed and the equations (12) and (13) do not hold good any longer.

Even if $R_1 = R_2$, the electrical fields due to the figures themselves will to a certain extent alter the theoretical forms of the separating lines. This deformation is, however, in most cases very small. We shall briefly consider these influences and suppose for the sake of simplicity that the front of the impulse is vertical. The figure from

Even if $R_1 = R_2$, the electrical fields due to the figures themselves will to a certain extent alter the theoretical forms of the separating lines. This deformation is, however, in most cases very small. We shall briefly consider these influences and suppose for the sake of simplicity that the front of the impulse is vertical. The figure from

A_1 (see Fig. 15) has just reached the line cp at the moment the impulse reaches A_2 . If then the ratio between the velocity of the two figures is constant, the separating line will be a straight line ce through the point c . The electric field due to the charge on A_2 and on the figure spreading from A_2 will, however, cause some slight deformations of

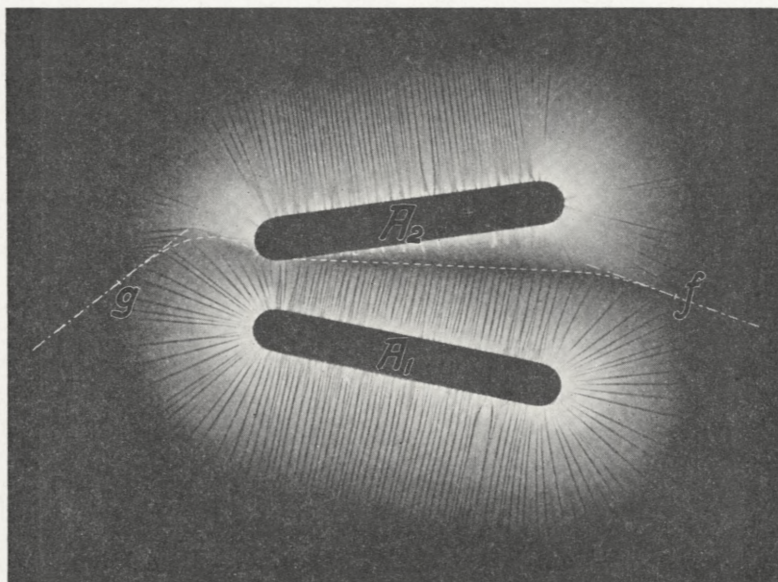


Fig. 16.

this line. The main effect of this field is that it retards the spreading of the figure from A_1 especially between the points c and d . Another, but generally very small effect, is the retardation of the spreading-velocity of the figure from A_1 between the points d and e resulting in a bending down of the separating line as shown in the curve $c_2 c_3$. This effect is only perceptible if the point e is at a distance from A_1 very nearly equal to the final range of the figure

from A_1 . In this case the electric density is much greater above than below the separating line and the figure from A_1 will therefore be retarded.

It is mainly in positive figures that the deformation at c_1 appears. This is no doubt, partly at least, due to the fact, that positive figures do not commence to spread be-

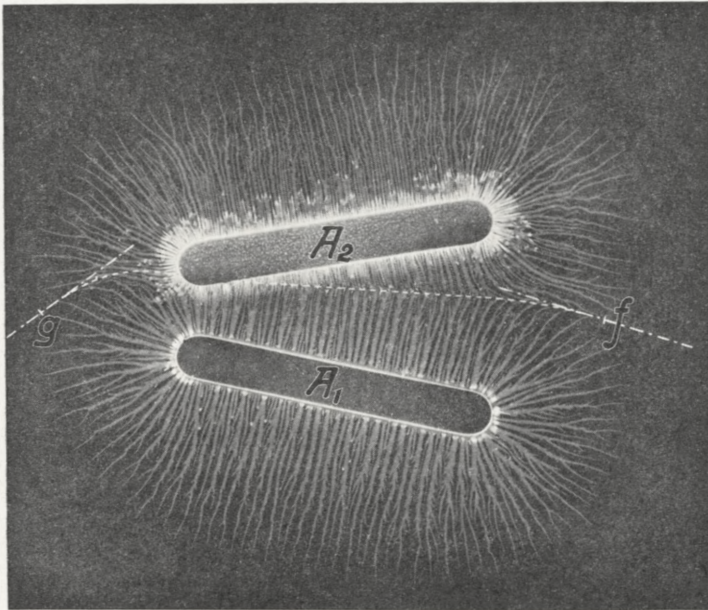


Fig. 17.

fore the tension has attained a certain value dependent upon the condition in the experiment, compare L. F. I p. 51 and 54, and the note on page 32 in the present paper.

Generally speaking the above mentioned deformations of the straight separating line are only very small and the position of the point c may therefore be determined with considerable accuracy. It is a great help in this that the

angle φ_2 which the theoretical straight separating line forms with A_2 may be calculated according to equation (10₂).

How closely the theoretical form of the separating line agrees with the actual one will be evident from an inspection of the negative velocity figure in Fig. 16 and the positive ones in Fig. 17 and 18. Furthermore we have on

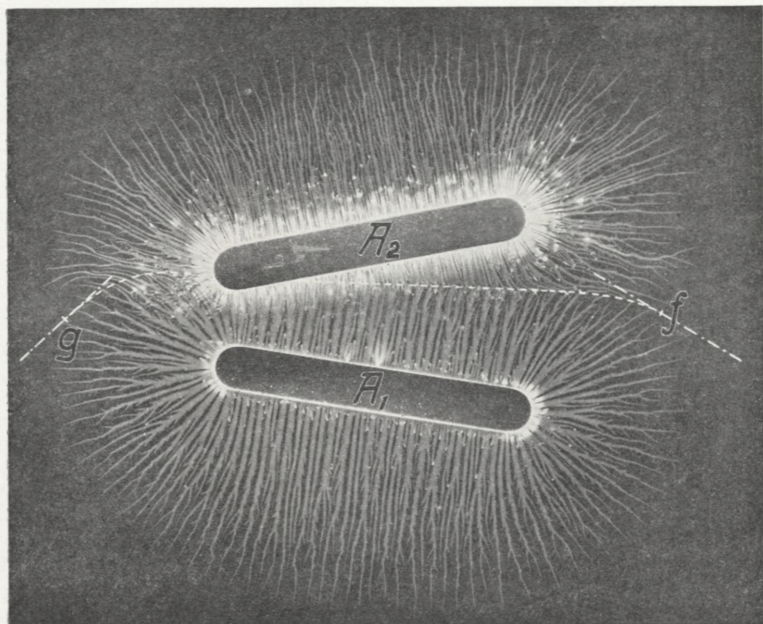


Fig. 18.

Plate 1 and 2 shown some magnifications of the straight part of the separating line from some positive — Plate 1 parts I-IV and Plate 2 Parts I-II — and negative — Plate 2 Parts III-IV — velocity figures. A closer inspection will show the remarkable “straightness” of these parts of the separating line. The bending down of this line close to A_2 in Parts II-IV on Plate 1 is due to a sloping wave front (see Fig. 12) and to the electric field from A_2 , com-

pare Fig. 15. The bent part ab in part II on Plate 2 is due to the end of A_1 .

From an inspection of the figures on Plate 1 and 2 it is evident that the straight part of the separating line may — with the use of a magnifying glass — be drawn with great certainty. When the negative velocity figures in Figs. 13 and 16 give the impression that there is a rather great uncertainty with regard to the position of that line, this is only due to the circumstance that some of the details which serve to fix the exact position of the said line — and which are to be seen in parts III and IV of plate 2 — although very clear in the original plates have been lost in the copies.

As a further verification of the correctness of our results we may compare the angle φ_2 between the electrode A_2 and the straight part of the separating line measured on the plate with the value of that angle calculated according to the equations (10₂) and (11). A long series of measurements have shown that the observed and the calculated values of φ_2 agree fairly well, the differences being within the limits of possible errors. As an example we quote in Table 1 three such sets of measurements.

Table 1. Positive Velocity Figures.

Plate	R	a	φ_0	$\Delta\varphi$	φ_2 cal.	φ_2 obs.	φ_2 cal. — φ_2 obs.
M. 324	30 mm	8.6 mm	22°	3.7°	12.8°	12.5°	+ 0.3°
» 320	31 »	10.9 »	21°	4.5°	12.5°	12.6°	— 0.1°
» 327	34 »	13.0 »	19°	4.5°	11.8°	12.2°	— 0.4°

The two negative velocity figures Figs. 13 and 16 and a third one not reproduced here seem to form an exception to this agreement. The data for these three figures

Table 2. Negative Velocity Figures.

Plate	R	α	φ_0	$\Delta\varphi$	φ_2 cal.	φ_2 obs.	φ_2 cal. — φ_2 obs.
M. 319	32 mm	9.0 mm	21.2°	3.5°	12.3°	10.0°	+ 2.3°
» 320	25 »	9.5 »	19.2°	4.4°	11.8°	10.2°	+ 1.6°
» 321	32 »	12.0 »	20.0°	4.6°	12.3°	10.6°	+ 1.7°

are collected in Table 2, from which it appears that the calculated values are decidedly greater than those observed, and the differences are outside the limit of the possible errors. The cause of this discrepancy is the following:

As mentioned before the final range R_2 is — with relatively great values of t_0 — considerably greater than the range R_1 . In order to investigate the correctness of the equations (12)—(14) for negative figures it was necessary to arrange matters in such a way that the two ranges become equal. In order to obtain this equality in range a shunt was inserted between the point c (see Fig. 1) and earth and the resistance of this shunt was given such a value that $R_1 = R_2$. Another effect of this shunt is, however, that the voltage at A_2 becomes somewhat less than the voltage at A_1 , and consequently φ_2 obs. must be smaller than the value of φ_2 calculated by means of the equations (10₂) and (11).

In Figs. 13 and 16—18 we have shown the direction of the tangents to the separating line at the points f and g calculated by means of the equations (12)—(14). For the points f the calculated direction of the tangent agrees fairly well with the actual direction of the separating line at these points. For the points g there is no such agreement and the cause hereof is mentioned before and needs no further comment. Still it may be worth while to point out that the lines in the negative figures are straight from the

electrode A_1 and right to the theoretical separating line in the neighbourhood of the point g , and that they have a rather sudden bend where they pass over the said line, see especially Fig. 13.

The experiments have thus confirmed all the conclusions which we have drawn from the equations (5₂), (8) and (9).

6. The Measurement of Very Small Intervals of Time. Concluding Remarks.

We are now in such a position that we can use the spreading of the Lichtenberg figures for the determination of a very small interval of time t_0 which passes from the moment one electric impulse reaches the electrode A_1 to the moment when another impulse reaches A_2 . In order to do this it is only necessary to determine the corresponding A -curve with a as abscissa and t_0 as ordinate, where a is the distance from the point c to the edge of the electrode A_1 , c being the point where the straight part of the separating line cuts on the edge of A_2 , see Figs. 3—6 and 12.

In practice there is no difficulty in fixing the position of the straight part of the separating line with sufficient accuracy. It is most easily done in the following way: A preliminary line is drawn and the corresponding value of a measured. With this value of a and the measured value of R_1 the angle φ_2 is calculated from the equations (10₂) and (11). A new straight line forming this angle with A_2 is then drawn in such a position, that it coincides as closely as possible with the actual separating line. In doing this a magnifying glass is of great help. If the new value of a corresponding to this separating line does

not differ considerably from the first, the new value of a may be taken as the correct one, if not, the procedure must be repeated once more. With a little experience this repetition will generally be found unnecessary. With the thus determined value of a we take from the A -curve the corresponding value of t_0 .

This is, however, only true for those parts of the curves A in Figs. 4—6, which are drawn in full line. There is some uncertainty both for very small values of a and for such values which are but little smaller than the final range R . With regard to the first part there can be no doubt whatever that the wave front is not vertical, and the A - (and B -) curves must therefore necessarily have another form than that corresponding to equation (8) and (9). The first part of the A - and B -curves will, really, have a shape similar to that shown in dotted lines in Fig. 19.

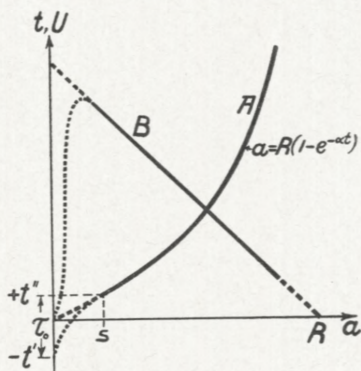


Fig. 19. Probable Form of the A - and B -Curves for Sloping Wave Front and for Very Small Values of a .

The A -curve will start from a point $-t'$ of the t -axis and the B -curve from the origin. The velocity curve will also, as shown in Fig. 20, start from the point $-t'$ of the t -axis. The duration of the sloping wave front is in both figures denoted by τ_0 , and the symbols t' and t'' are the same as those used in Fig. 10.

In the Figs. 4—7 t_0 is the time interval between the arrivals of the vertical fronts of the equivalent waves and, as shown before, the irregularities due to the sloping of

the wave fronts will not have any influence on the form or position of the A -curve for all such values of a which are greater than s , see Fig. 19, and these irregularities will have no influence whatever on the determination of the time interval t_0 between two impulses when $t_0 > t''$.

The duration, $\tau_0 = t' + t''$, of the sloping wave front is certainly very short. For the determination of the intervals below 5×10^{-9} seconds it would be desirable to know the

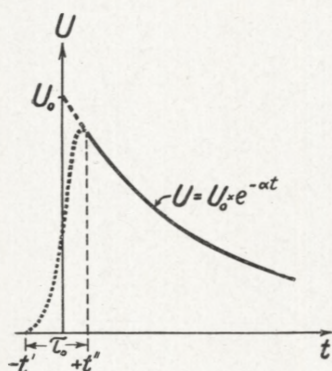


Fig. 20. Probable Form of the Velocity-Time Curve for Sloping Wave Front.

exact form of the wave front. Some preliminary experiments with this object in view have been made, but the problem is rather difficult and no definite information can be given at present.

An inspection of the Figs. 4—6 and 8—9 will show that the method, as developed at present, is most convenient for the measurements of time intervals between 0.5×10^{-8} and 10×10^{-8}

seconds. There is no doubt, however, that its useful domain can be extended down to or even below 1×10^{-9} seconds and up to say 2×10^{-7} seconds.

With regard to the other point of uncertainty, where the value of a approaches that of the range R , it is quite evident that such great values of a cannot be used for any exact measurements of t .

There still remains one question which ought to be mentioned: Do the figures start immediately when the voltage reaches the electrode or is there some delay? For the measurement of t_0 this question is, however, without any

great importance — compare section 5. — and we shall therefore not enter into any detailed discussion of it at present, but this problem, which is closely connected with that of the formation of electric sparks, will be treated of elsewhere. A few words will, however, have to be said here with regard to some remarks by K. PRZIBRAM¹. There is no doubt whatever that the formation of a positive figure does not begin before the voltage has reached a certain value dependent upon gas pressure and several other circumstances. This has already been pointed out in L. F. I, p. 52 and 54. We did not, however, mention this on p. 60 of that paper, where we said: "Supposing the two figures start simultaneously the ratio of the distances from the electrodes to the neutral discharge will be equal to the ratio of their velocities." The reason was that our main object then was to prove conclusively that the velocity of the positive is greater than that of the negative figures. A possible time-lag in the start of the positive figures would not invalidate our arguments, and we therefore did not think it necessary to enter into any further discussion of that point.

K. PRZIBRAM's interesting investigations seem to prove that there is a greater retardation in the start of the positive figures than could be explained by the existence of the above mentioned minimum voltage. Other circumstances point in the same direction. We do not, however, believe that this question, which is of considerable interest in several ways, can be considered as definitively settled.

¹ K. PRZIBRAM: (1). *Phys. Zeitschrift* 21, p. 480—484, 1920. (2). *Wien. Ber. Math.-naturw. Kl. II a*, 129, p. 151—160, 1920.

Résumé.

It has been shown that the three equations (I)—(III) on page 2 have the following forms:

$$r = R(1 - e^{-\alpha t}), \quad (I')$$

$$U = \alpha R e^{-\alpha t} = U_0 \cdot e^{-\alpha t}, \quad (II')$$

and

$$t = \frac{1}{\alpha} \log_{\text{nat}} \frac{R}{R-a}. \quad (III')$$

Some values of the constant α are given in Figs. 8 and 9.

The author desires to express his thanks to Mr. J. P. CHRISTENSEN and Mr. A. G. JENSEN for their valuable assistance during this investigation.

The author also desires to acknowledge his indebtedness to the CARLSBERG FUND for its support of these investigations.

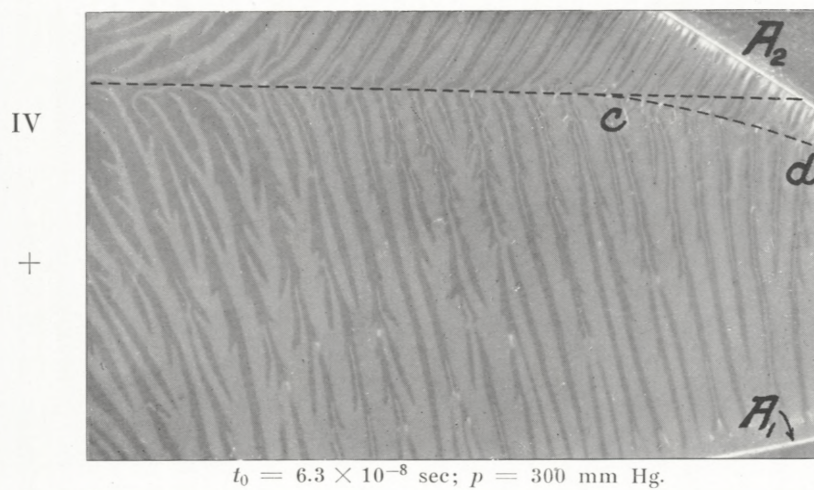
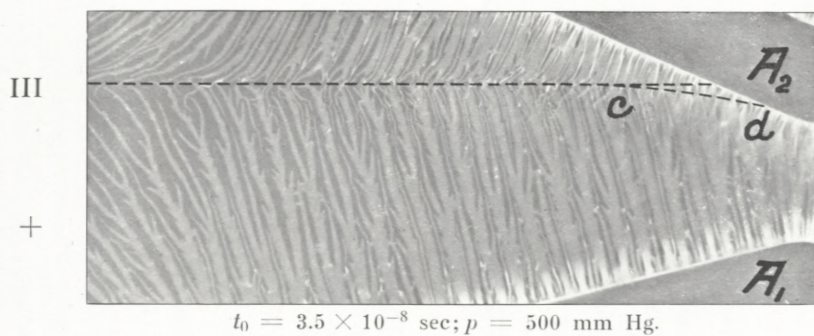
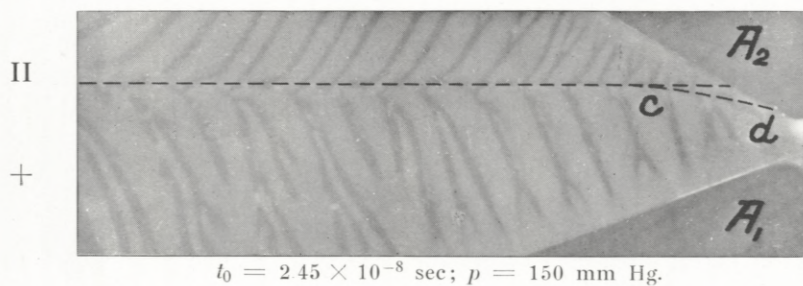
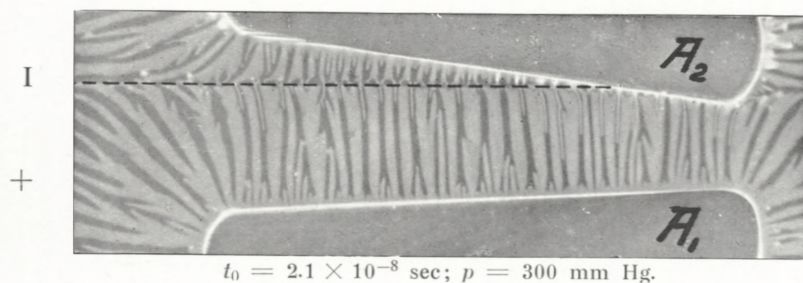
*The Royal Technical College, Copenhagen,
Telegraph and Telephone Laboratory.*

Bibliography II

containing some papers which were overlooked in the preparation of the first Bibliography or which have appeared since its publication.

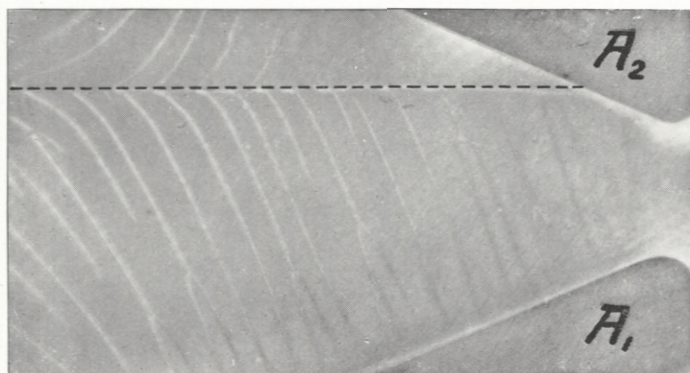
- RAGNAR ARPI: Synthetische Studien über Dendritenstruktur, auf Metallographie und elektrische Entladungen angewendet. Arkiv f. mat., astr. och fysik. Bd. 8. Nr. 14. 1912.
- B. ELL: Ny method att medels ljuskänsligt preparerade papper eller plåtar åskådliggöra kraftlinjernas riktning och relativa antal i ett elektrisk fält. Teknisk Tidskrift. Afd. Elektroteknik. 51. Årg. p. 49—55. 1921.
- K. PRZIBRAM: 1. Beiträge zur Kenntniss des verschiedenen Verhaltens der Anode und Kathode bei der elektrischen Entladung. Wien. Ber. Math. naturw. Cl. Bd. C VIII. Abth. II a. p. 1161—1171. 1899.
- 2. Vorläufige Mitteilung über die photographische Aufnahme der elektrischen Entladung auf rotierenden Films. Ibid. Bd. C IX (II a). p. 902—904. 1900.
- 3. Photographische Studien über die elektrische Entladung. Ibid. Bd. C X (II a). p. 960—963. 1901.
- 4. Ueber das Leuchten verdünnter Gase im Teslafeld. Ibid. Bd. C XIII (II a). p. 439—468. 1904.
- 5. Ueber die Büschelentladung. Ibid. Bd. C XIII (II a). p. 1491—1507. 1904.
- 6. Büschel- und oszillierende Spitzenentladung in Helium, Argon und anderen Gasen. Ibid. Bd. C XVI (II a). p. 557—570. 1907.
- 7. Die Büschelentladung in Chlor und die Beziehung zwischen Büschelentladung und Ionenbeweglichkeit. Ibid. Bd. CXXI (II a). p. 2163—2168. 1912.
- 8. Einpolige elektrische Figuren und Elektronenaffinität. Ibid. Bd. 127 (II a). p. 395—404. 1918.
- 9. Ueber die elektrischen Figuren. Phys. Zeitschr. 19. p. 299—303. 1918.
- 10. Form und Geschwindigkeit. Die Naturwissenschaften. Heft. 6. p. 103—107. 1920.
- 11. Ueber die Ladung der elektrischen Figuren. Wien. Ber. Math.-naturw. Kl. Abt. II a. 128 Bd. p. 1203—1221. 1919.

- K. PRZIBRAM: 12. Ueber die elektrischen Figuren. II. Mitteilung. Phys. Zeitschr. 21. p. 480—484. 1920.
- 13. Der Vorsprung der negativen Entladung vor der positiven. Wien. Ber. Math. naturw. Kl. II a. Bd. 129. p. 151—160. 1920.
- K. PRZIBRAM und E. KARA-MICHAILOVA: Orientierte Gleitbüsche auf Kristallflächen. Zeitschr. f. Physik. 2. p. 297—298. 1920.
- J. SPIESS: Ueber die auf Wasser gleitenden elektrischen Funken. Wied. Ann. 31, p. 975—982. 1887.
- A. A. CABELL SWINTON: Electrical Discharges. The Electrical Review. Vol. XXXI. p. 273—275. 1892.
- M. TOEPLER: Ueber die physikalischen Grundgesetze der in der Isolatorentechnik auftretenden elektrischen Gleiterscheinungen. Archiv für Elektrotechnik. X. p. 157—185. 1921.
- USABURO YOSHIDA: 1. Figures produced on Photographic Plates by Electric Discharges. Mem. Coll. Sc. Kyoto Imp. Univ. Vol. II. p. 105—116. 1917.
- 2. Further Investigations on the Figures produced on Photographic Plates by Electric Discharges. Ibid. p. 315—319.



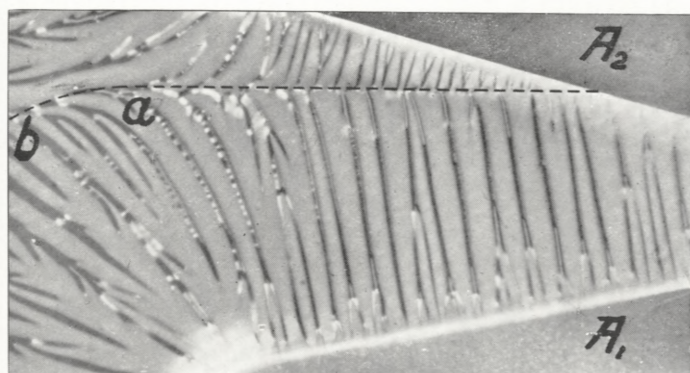
I

+


 $t_0 = 2.1 \times 10^{-8}$ sec; $p = 150$ mm Hg.

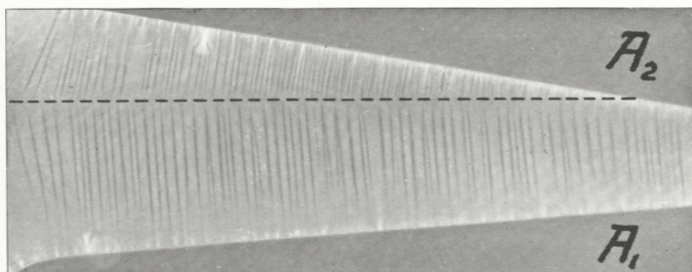
II

+


 $t_0 = 2.1 \times 10^{-8}$ sec; $p = 300$ mm Hg.

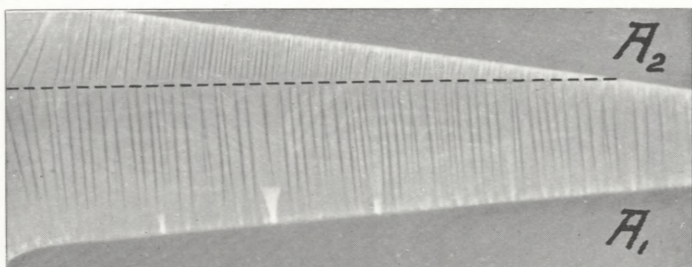
III

-


 $t_0 = 3.5 \times 10^{-8}$ sec; $p = 400$ mm Hg.

IV

-


 $t_0 = 3.5 \times 10^{-8}$ sec; $p = 400$ mm Hg.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7 RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrenes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse »NH ₂ COONH ₄ + H ₂ O ⇌ (NH ₄) ₂ CO ₃ « und »CO ₂ + H ₂ O ⇌ H ₂ CO ₃ «. 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922.....	0.60
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922.....	0.70
6. PRYTZ, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922 ..	0.75
7. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922	2.15
8. BØGGILD, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). (Under Pressen).....	
9. WIEDEMANN, E. und FRANK, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922	0.75
10. PEDERSEN, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. (Under Pressen)	

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 8.

RE-EXAMINATION OF SOME ZEOLITES

(OKENITE, PTILOLITE, ETC.)

BY

O. B. BØGGILD



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 1,40.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 8.

RE-EXAMINATION OF SOME ZEOLITES

(OKENITE, PTILOLITE, ETC.)

BY

O. B. BØGGILD



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

By a revision of the numerous specimens of the needle-shaped or radiated zeolites of the Mineralogical Museum of Copenhagen I found that those minerals were in many cases falsely determined, and by undertaking a thorough examination of them I found out some facts which, as I think, are rather interesting and ought to be generally known.

The okenite is in its common forms a rather uniform and well known mineral. It is very obvious, however, that most of its physical properties have been very imperfectly examined and that consequently, in many cases where its outer appearance is not so easily recognised and where it has not been chemically analysed it has been incorrectly determined.

The ptilolite has also hitherto been very imperfectly examined so that it has been quite impossible to determine that mineral without chemical analysis. The newly described mineral flokite from Teigarhorn, Iceland, has proved to be identical with the ptilolite, which has been found from many different localities and with a very varying outer appearance.

The three common minerals, scolecite, mesolite and natrolite, are so well described and generally known that there is in general nothing to be added in this respect. There is only one phenomenon which I have found occa-

sion to point out, viz. the regular intergrowth and commixture of those minerals, in some instances together with thomsonite; this phenomenon, which is of a very common occurrence and very characteristic, has almost never been described and consequently deserves a closer description.

I. Okenite.

Occurrence. The okenite has been found almost only in the North-Atlantic basalt formation where in some places it seems to be very common. In other parts of the world there are only two occurrences known with certainty, namely Poonah at Bombay and Rio Putagan in Chile. Other occurrences named in the literature are, in my opinion, very uncertain, as will be mentioned later on. It is very probable, however, that the mineral, when searched for, will prove to be rather common in other basaltic regions too.

With the exception of Rio Putagan, where the okenite is found as a thin coating upon lava, the mineral is only known as a filling out of cavities in basalt. As it is mostly very compact and solid it has in most cases been taken up as loose pieces on the shore, and it is characteristic that, among the numerous specimens in the Museum of Copenhagen, there does not exist any where the surrounding rock is left; small traces of basalt are, however, eventually found as intrusions in the okenite.

Concerning the association of minerals, together with which the okenite is found, very little is stated, and only CURRIE¹ gives some instances which shall be mentioned

¹ The Mineralogy of the Faerøes arranged topographically. Trans. Edinb. Geol. Soc. IX, 1905—6.

in the following. As CURRIE does not mention how he has determined the mineral which may, in some cases, be difficult to recognise with certainty without optical examination, we cannot be sure that his determinations are all right, but in most cases I think they will be so.

In this connection it must be mentioned, too, that CORNU¹ mentions okenite (?) together with calcite and natrolite as occurring in cavities in the basalt at Krebsberg in Bohemia. In another place² he mentions the okenite from two other Bohemian localities, Grosspriesen and Daubitz, and it is stated to occur as a characteristic "Begleitmineral" to the zeophyllite. As CORNU does not in any case state how he has determined the okenite, we cannot be quite sure that this mineral is really found in Bohemia (Compare p. 17).

In the following I shall give the associations known for the Färöes and Greenland: for the other localities, from which the mineral is described (Iceland, India and Chile) it is not possible to state anything in this respect for want of material.

In the Färöes the okenite seems to be a common mineral; concerning the occurrence on these islands CORNU and GÖRGEY³ give the very interesting information that the mineral is only found in the basalts above the coal formation and among them only in those of the porphyric type, but they do not mention any special locality. The mineral has been found in the following places:

1. Nolsö. From Tjörnunes CURRIE mentions that HEDDLE⁴ has described the mineral as forming a vein lined on

¹ Centr. f. Min. 1909. p. 157.

² Centr. f. Min. 1906. p. 80.

³ Zur Geologie der Färöer. Centralblatt für Min. 22, 1908, 675.

⁴ Trans. Geol. Soc. Glasgow, X, 1892, 249. In that place there is nothing about okenite.

each side by minute crystals of heulandite. CURRIE states that on HEDDLE's ticket it is said to have been analysed, but that he has not succeeded in tracing this analysis.

2. Strömö. From Kvivig CURRIE mentions a specimen in the British Museum, which is the same as has been analysed by CONNELL¹; but, as CURRIE states, here must be some uncertainty, as the locality has been added on the ticket by a subsequent hand. From Tjörnevig according to CURRIE the mineral has been mentioned by HEDDLE². From Fjöruglivrar CURRIE mentions the mineral as uncertain (possibly tobermorite). From Strömnäs CURRIE mentions okenite upon heulandite, forming the base of the dome-cavity of a geode. At Kvalvig the mineral has been found by HEDDLE²; CURRIE mentions that heulandite is found in minute crystals under the okenite and assumes that it is that occurrence which has been analysed by SCHMID³ without giving further reasons for that assumption.

3. Vaagö. From that island, without further locality, there exists a very interesting specimen in the Museum of Copenhagen. Outermost there is a distinct layer of almost 1 cm, which in the outer part consists of small masses of mesolite but in the larger inner part of finegrained quartz penetrated by mesolite needles. Upon that layer is placed the okenite which is mostly of the common appearance but in the inner part leaves a large cavity, into which protrude innumerable free crystals, which have afforded an excellent material for crystallographical examination.

¹ Ed. Phil. Journ., 17, 1834, 198.

² Trans. Geol. Soc. Glasgow, XII, p. 249; on that place there is nothing about zeolites, but in the same volume, p. 1., there is the paper of HEDDLE about the Mineralogy of the Farøe Islands, where he mentions the okenite from another locality on Strömö, Kvalvig.

³ Pogg. Ann. 126, 1865, p. 143.

5. Österö. From Kambur CURRIE mentions okenite filling small druses, which are lined very thinly with another zeolite, perhaps heulandite. From Eldevig the Museum of Copenhagen possesses two specimens, collected by CORNU, which afford very interesting mineral associations. In the one specimen there is the following succession (Fig 1): outermost a thin layer of green earth (1): thereupon a thin layer (ca. $\frac{1}{2}$ mm) of some grained zeolite, probably heulandite (2). Upon that comes a regular layer (2 mm) of chalcedony (3), and thereupon follows the okenite (4), while the whole interior part of the geode is filled with grained apophyllite (5). On the one side of the geode, the original underside, there are placed several regular horizontal layers of different minerals between the chalcedony and the okenite. These are in the bottom a fine grained, milky apophyllite (6); thereupon a chalcedony, almost 1 mm thick (7), whereupon follows a very thin intrtransparent layer of a not determinable substance (8). Then follows a new layer of grained apophyllite, quite transparent (9) and lastly a layer of ptilolite (10); this is however very impure and throughout mixed with okenite and perhaps with other minerals too.

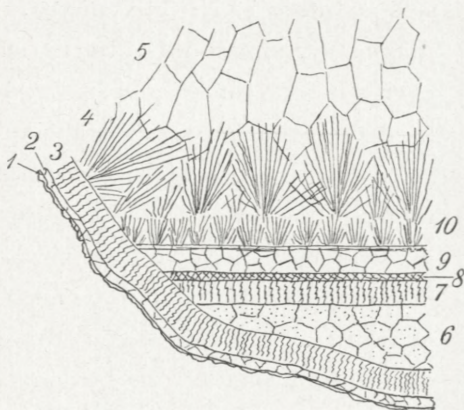


Fig. 1. Okenite from Eldevig.

On the one side of the geode, the original underside, there are placed several regular horizontal layers of different minerals between the chalcedony and the okenite. These are in the bottom a fine grained, milky apophyllite (6); thereupon a chalcedony, almost 1 mm thick (7), whereupon follows a very thin intrtransparent layer of a not determinable substance (8). Then follows a new layer of grained apophyllite, quite transparent (9) and lastly a layer of ptilolite (10); this is however very impure and throughout mixed with okenite and perhaps with other minerals too.

The other specimen is not so complicated being mostly filled out with a very hard ptilolite penetrated by numerous small spherulites of chalcedony, while only a small space

in the interior is left for a rather disintegrated okenite or sometimes for grained apophyllite.

6. Bordö. From that island, without special locality, has originated the mineral »bordite«, analysed by ADAM¹, which is identical with okenite. Further, as stated by CURRIE, it is probable that the mineral analysed by CONNELL² has come from the same island. The Museum of Copenhagen possesses a specimen from Bordö, which has, in the outer part, a very thin layer of heulandite while the okenite itself is rather pure, only mixed, in some places, with small masses of apophyllite. In the inner part of the geode a cavity is left; the okenite is, however, not regularly crystallised there but possesses a curiously furrowed inner surface.

7. Viderö. From Tunna fjall CURRIE mentions okenite under (?) stilbite.

In Greenland the mineral is only known from the island of Disko, but it seems to exist there in very large quantities. Kutdlisat on the north-eastern side of that island is probably the original locality for the mineral, analysed by KOBELL³ and described by BREITHAAPT.⁴ On the south-eastern side of the island, close east of Godhavn, there are two localities, Blæsedal and Skarvefjeld, from which the Museum of Copenhagen possesses numerous specimens of a rather uniform appearance. The okenite is here alone in the geodes or associated with chabasite or apophyllite, and it may be formed before or after those minerals or, sometimes, contemporaneously with them. In the south-western part of the island there is the large fjord, Diskofjord, from where the museum possesses many spec-

¹ Dufrenoy, Min. 4, 1859, 697.

² Edinb. Phil. Journ. 17, 1834, 198.

³ Kastn. Archiv. 14, 1828, 333.

⁴ Pogg. Ann. 64, 1845, 170.

imens, mostly with the same associations as above and sometimes also with a thin coating of heulandite. As special localities in the same fjord, which are represented in the Museum of Copenhagen, may be mentioned Tarajungisok, where the okenite is seated upon crystals of desmine, Karusuit, where in one specimen it is surrounded by chabasite and in another case is associated with calcite, heulandite and apophyllite, and as the last locality Erkratok, where the first formed mineral is heulandite in small crystals, while in the interior part of the geode there is a cavity with small but well developed okenite crystals.

As the general result it will be seen, that the okenite can be associated with many different other zeolites together with chalcedony, quartz and calcite. It is, however, rather obvious, that two minerals are more common followers of the okenite than any others viz. the heulandite and the apophyllite, the first being in most cases the older and the second the younger. What is the cause of the common occurrence of these minerals with the okenite, cannot easily be seen; especially the heulandite is not chemically more related to the okenite than most of the other zeolites. The apophyllite has more affinity to the okenite, both minerals belonging to the class of zeolites without alumina, but it is on the other side difficult to understand, why the two minerals are in no case accompanied by other zeolites of the same class, especially the gyrolite, which mineral is rather common in the basalt of the same region.

Crystalline form. The crystals have been described by BREITHAUPT¹ who has examined freely developed, needle-shaped crystals from the Museum in Vienna. He states that the crystals, which could be determined with great

¹ Pogg. Ann. 64, 1845, 170.

exactness on the goniometer, were rhombic, pseudohexagonal with the combination (001), (110), (010) and sometimes (120); the prismatic angle (110):(110) was found to be $57^{\circ} 41'$. With exception of this last value, which appears approximatively in my crystals, but not as a prismatic angle, I have found the crystals as different from those of BREITHAAPT as possible. It is difficult to imagine that the last named crystals really belong to okenite, but on the other side I cannot find out any mineral which has a form similar to that described by BREITHAAPT and which can, with any probability, occur together with okenite. Among the zeolites known there is none of that form and among the other minerals which occur under the same circumstances the same is the case. The aragonite has, to be sure, a similar prismatic angle, but most of the not composite-twinned crystals are not in possession of basis. In order to solve the problem I wrote to Professor F. BECHE Vienna and asked him to send me some of the crystals of okenite examined by BREITHAAPT, but he kindly informed me that Dr. A. MICHEL had searched for those crystals in the collection in Vienna without being able to find them. Dr. MICHEL suggests that: "Wahrscheinlich ist es später als etwas anderes erkannt worden, denn unter Okenit und verwandten Mineralien findet sich keine Stufe, die auf die Beschreibung Breithaupts passen würde".

The crystals which have been examined by me originate from two localities, mentioned in the foregoing chapter, viz. Vaagö (p. 6), and Erkrotok on Disko, Greenland (p. 9). That they really belong to the okenite can be demonstrated by their optical properties, which in all respects are in accordance with those of the commonly known fibrous aggregates of the mineral, upon which they are placed as con-

tinuations of the fibres. The crystals are in most cases seemingly well developed, pure and transparent, and the only hindrance to their exact determination is their small size. They have the form of flat, elongated tables, almost like a ruler; the length may be a few millimeters while the maximum breadth is 0.08—0.1 mm and in most cases much smaller, and the maximum thickness reaches a dimension of almost 0,008 mm. It is clear that the reflexions under these circumstances must be very poor: only the rather large faces of b (010) can give good signals while all the others only give very faint spots of light which cannot be exactly measured and which may, in consequence, deviate several degrees from each other. For the faces in the prism zone there is, in addition, the circumstance, that this zone is very highly striated, while the face c , though much smaller, gives much better values. That the system and the twin formations are correctly stated can, however, be considered as absolutely certain, as the results here are in full accordance with the optical properties. The measurements are made with the two-circled goniometer which is the only method of finding the reflexions of the very small faces.

The system is the triclinic with the axial angles:

$$\alpha = 122^{\circ}54', \quad \beta = 67^{\circ}46', \quad \gamma = 50^{\circ}10'.$$

$$(001):(010) = 115^{\circ}02', \quad (100):(001) = 87^{\circ}17',$$

$$(100):(010) = 56^{\circ}.$$

while the length of the axes could not be determined for want of other well developed faces. The crystals were placed on the goniometer with the zone $a:b$ as the equatorial one, and the values of φ are counted from the face of b . Then we get for the face a (100):

$$\varphi = 56^{\circ} (54-58^{\circ})$$

and for c (001):

$$\varphi = 141^\circ \text{ (136--146)}, \quad \rho = 33^\circ \text{ (31--34)}.$$

The angle of 56° between a and b has some resemblance to the prismatic angle of BREITHAUPT, but as the two faces are highly different in respect to size and lustre, it is impossible that they can be regarded as belonging to the same prism. It is only the crystals from Greenland which have the said angle of 56° , while those from the Färöes, instead of the face a , have another which is placed at a distance from b of ca. 76° ($68\text{--}82^\circ$): there must probably exist some prismatic face here, but its position is so indistinct that it is quite hopeless thereof to try to get the ratio between the axes a and b from it. Sometimes there has, on the Greenlandic crystals, been found a face which in one case has given the position:

$$\varphi = 118^\circ, \quad \rho = 54^\circ,$$

but it is impossible from that value alone, which is rather uncertain, to get any further axial element. The face lies outside the zone (001) : (100) and must, in consequence, be a pyramidal one.

The angle β which has been calculated to be $67^\circ 46'$, is easily observed by measurement of the crystals lying on the face b under the microscope, and in this manner I have in several cases measured this angle to $67\text{--}68^\circ$.

There are three kinds of crystals, which are schematically drawn on the figure 2, viz. I, a single crystal, II, a twin after b (010) and III, a twin after the axis c . It must be remembered, however, that most of the smaller faces cannot be seen directly but are determined only by their positions measured on the goniometer. Of these kinds the second is by far the most common. While the third class is easily

distinguished from the others by the more symmetrical outline of the crystals the two first can be distinguished only on the goniometer or when they are placed on the edge enclosed in a liquid.

As for the common twins (II) it must to be remarked, that while the faces a on the forepart and the faces c in most cases give rather distinct reflections, it is never possible to obtain such from the faces of a , which should form the reentrant angle on the backside; the crystals are here obviously bounded by very imperfect or rounded faces. The twins after the axis c (III) give in most cases better reflexions. The composition-face for these twinings is forming an angle of 39° with (010) , and this obliquity is easily seen when these crystals are enclosed in a liquid and turned round.

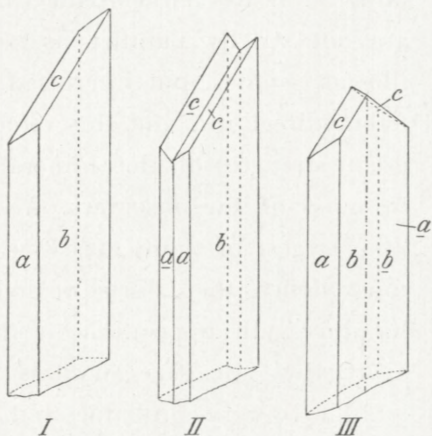


Fig. 2. Okenite. I. Single crystal;
II. Twin after (010) ;
III. Twin after the axis c .

Physical properties. Cleavage. It is commonly stated¹ that there is trace of a cleavage in the longitudinal direction. Now, it is certainly a very difficult matter to cleave out those very small crystals, but there can be no doubt that there must exist a very perfect cleavage after b (010) as the crystals possess, on that face, a marked pearly luster. When seen under the microscope that cleavage is, in most cases, very distinct, while it is impossible with certainty

¹ After LACROIX, Bull. Soc. Fr. Min., 8, 1885, 342.

to detect any cleavage in other directions. Best seen perhaps, is the cleavage, in the common fibrous masses of the mineral, which are very characteristic and easily to be recognised from other similar minerals (mesolite, ptilolite a. o.) by the occurrence of those brilliantly shining cleavage faces, in most cases of a peculiar curved form.

Concerning the common aggregates of the okenite there is not much to be added to the former descriptions of that mineral. It is characteristic that the fibres in most cases are not strictly parallel, as is mostly the case with other fibrous zeolites, but interlaced between each other in different directions, and this circumstance is the cause of the great strength of the mineral, which has been obvious to most of the observers, f. i. HEDDLE¹ who states that "the largest of these masses (3—8 inches in diameter) almost defied the efforts of half-a-dozen men and a 28-lb hammer". In opposition to the single individuals of the aggregates the free crystals are perfectly straightlined, and it is very probable that the first formed crystals of the compact masses are developed in the same manner but afterwards bent by the pressure of the later grown elements. For the crystals are quite flexible and elastic as mica. There are, however, found exceptions from the rule that the individuals of the compact okenite are irregularly arranged, and in such cases it may be very difficult, without closer examination, to distinguish that mineral from other zeolites.

The colour is not in most cases pure white, sometimes a little yellowish and sometimes bluish. Most specimens are almost quite intransparent, especially some more altered forms, but in other cases the mineral may be translucent

¹ Trans. Geol. Soc. Glasgow, XII, 1902, p. 10.

as alabaster, and it is then often bluish in reflected light and yellowish in transmitted light. The free crystals are mostly quite colourless and transparent.

The specific gravity is somewhat varying, which is perhaps mostly caused by the different degree of compactness. In the literature have been stated values from 2.28 to 2.36. For the compact forms I have found similar values viz. 2.323, and 2.325 for the purest varieties of the more translucent okenite. The crystals are a little heavier, varying between 2.326 and 3.332.

The optical properties of the okenite have been determined by LACROIX¹ who finds them in accordance with the rhombic symmetry: the extinction is parallel, positive in the longitudinal direction, the optic axial plane is parallel to, while the acute, negative bisectrix is normal to that direction. The axial angle is large. The mean refraction is determined at 1.556 and the double refraction at 0.0091.

By my examination I have come to results which are in most respects in opposition to those obtained by LACROIX and in full accordance with the triclinic symmetry. What is the cause of the differences between the results of LACROIX and those obtained by me I cannot say; in the following I shall state the optical properties, as I have found them: as the free crystals are in all respects in accordance with the common fibrous masses, of which I have examined a very large mass of specimens, there can be no doubt that all that I have examined is really okenite.

As for the extinction there is the curious circumstance which has, perhaps, led to the assumption that the crystals were rhombic, namely that it is parallel for rays normal to

¹ Bull. Soc. Min. de Fr., 8, 1885, 316; *ibidem*, 10, 1887, 152. M. Lévy et Lacroix, Les minéraux des roches, 1888, 346.

b (010), and as free crystals naturally always lie on that face, being by far the largest of all, it is somewhat difficult to look through them in other directions. When they, however, are placed in a liquid between glass hemispheres and turned round, we see in all other directions a marked obliquity. When for instance, they are placed on the edge, when the light then passes them in a direction lying in the face *b* (010) and normal to the vertical axis, there is an oblique extinction of 30—34° to the trace of (010), and when they are placed in a vertical position the obliquity is 25°. How these directions of extinction are orientated in relation to the obtuse or acute crystallographical axial angles, I have not succeeded in finding out, but the existence of so marked and constant obliquities in both directions shows that the crystals must be triclinic. As for the fibrous okenite the obliquity is in most cases not very distinct, as the fibres are mostly very irregularly interlaced, but in the rare cases, when the fibres are quite parallel, we cannot but remark the oblique extinction.

The optic axes are very difficult to find. By turning the crystals round in different directions in the glass hemispheres it is possible to find certain directions without interference colours, but in convergent light we see no distinct axis; it is certain that the axes are orientated very unsymmetrically in relation to the crystal faces, and it seems that the axial angle is very large.

The refraction is almost the same as for nelk oil, ($n = 1.541$), and the mineral can in all cases be easily determined by that property combined with the positive double refraction in the longitudinal direction. In most cases it is the longitudinally swinging ray which coincides with the refraction of the oil, while the transverse one has a

little smaller refraction. The values are, however, somewhat varying and I have for different specimens found the following:

$\gamma^1 = 1.541$	$\alpha^1 = 1.534$
1.533	1.525
1.544	1.535
1.541	1.530

The last pair of values are found for a pure crystal and must also be considered as the best possible. The real values for α , β and γ I have not been able to determine, as the axes of elasticity are orientated in a very unsymmetrical manner. For the double refraction in the common fibrous aggregates it has not been possible to obtain any good value as the fibres are orientated in a rather accidental manner while the single crystals are too small for an exact determination. The mean value is, however, not very different from that obtained by LACROIX, viz. ca. 0.01.

Before leaving the okenite I must point out two instances where the mineral has been described in the literature and where the values given for the refraction directly show that the mineral concerned must have been some other.

In his paper on the zeolites from the phonolite at Hegeberg in Bohemia MICHEL¹ among other zeolites describes the okenite as one of the best developed minerals from that locality. The values stated for the refraction and the specific gravity show that the mineral in question cannot be okenite, and in another paper² MICHEL has analysed it and found that it has the composition of scolecite, although the optical properties were not in accordance with

¹ Tscherm. Min. Mitt. 30, 1911, p. 482.

² Festschr. Corn. Doelter, 1920, p. 28.

that mineral. The substance has been referred to the mineral metascolecite described by RINNE¹.

In his first paper MICHEL has also determined the refraction of the okenite from the Färöes and found it to be 1.520, which value is, certainly, too small. He mentions the refraction found by LACROIX (1.556) but finds it too large for a zeolite. With this conclusion I cannot agree, as the non-aluminous zeolites, to which the okenite belongs, are stronger refracting than the others (for apophyllite $n = \text{ca. } 1.350$ and for gyrolite and zeophyllite $n = \text{ca. } 1.56$). Consequently we should for the okenite beforehand expect a refraction lying between these values.

In another place mention is made of the okenite by EAKLE and ROGERS² who describe it as an alteration product of wilkeite in the form of opaque masses with pearly luster and a fibrous structure. The index of refraction was determined at 1.565 ± 0.005 , the double refraction at $0.009-0.01$; the extinction is parallel and the elongation parallel to the slower ray. If the refraction is correctly determined it does not seem possible that the mineral can be okenite. The above named value is highly accordant with that for gyrolite ($\omega = 1.5645$, $\varepsilon = 1.5590$) and for zeophyllite, and in cross sections those minerals will show a fibrous structure with the slower ray parallel to the elongation; for those minerals the expression pearly luster is also much more significant than for the okenite where this property is only seen with difficulty because of the smallness of the faces. Only the double refraction is not so large for the gyrolite as for the mineral examined by EAKLE and ROGERS, but the difference between both does not, perhaps, exceed the exactitude with

¹ Sitzber. d. k. preus. Akad. d. Wiss. 46, 1890, p. 28.

² Amer. Journ. Sci. 37, 1914, p. 206.

which this property can be examined. The other properties stated are common to both minerals.

II. Ptilolite (Flokite).

The ptilolite was described by CROSS and EAKINS, first from the Green and Table Mountains, Jefferson Co., Colorado¹ and afterwards from the vicinity of Silver Cliff, Custer County, Colorado². Since then it has been described from the following localities: Crownprince Rudolf Island (Franz Josef Land), described by COLOMBA,³ St. Piero in Campo, Elba, described by G. D'ACHIARDI,⁴ Teigarhorn, Iceland, described by LINDSTRÖM⁵ and finally from Challis, Idaho, described by LOUIS K. KOCH⁶, and from Guadalcanar (one of the Salomon Islands), described by TSCHERMAK⁷. Two further occurrences, the Färöes and Seiser Alp, which are described and analysed by THUGUTT⁸ under the name of mordenite and which possibly belong to the ptilolite, will be mentioned later on under the said occurrences.

The mineral from Teigarhorn was, in 1917, described as a new species under the name of Flokite by Miss CALLISEN⁹. Indeed it was at that time scarcely possible to identify with full certainty the mineral from Teigarhorn with the original ptilolite, as its physical properties were very imper-

¹ Amer. Journ. Sci., 32, 1886, p. 117.

² Amer. Journ. Sci., 44, 1892, p. 96.

³ Atti R. Accad. delle Science di Torino 37, 1902, p. 553. Zeits. Kryst. 40, 1905, p. 101.

⁴ Atti della Societa Toscana di Sci. nat. residente in Pisa, 22, 1906, p. 150. Zeits. Kryst. 44, 1908, p. 664.

⁵ Geol. Fören. Förh. Stockholm, 29, 1907, p. 106.

⁶ The American Mineralogist, 2, 1917, p. 143.

⁷ Sitzb. Akad. Wiss. Wien, 126, I, 1917, p. 547.

⁸ C. r. Soc. sci. Varsovie, 5, 1912, p. 76; N. Jb. Min. 1913, 2, p. 33.

⁹ Medd. Dansk geologisk Forening, 5, Nr. 9, 1917.

factly stated and the chemical compositions not fully congruent. By means of specimens of the original ptilolite which I obtained from the museum of Washington I have been able to ascertain, that both minerals are identic and that the name flokite must, consequently, fall away. For the sending of the specimens I must render my best thanks to the Curator of the Museum in Washington, Dr. W. FOSHAG.

On examining our zeolites in the Museum of Copenhagen I found the ptilolite from many different localities and of a rather different outer appearance, and as I think that the same will be the case when other collections are revided I suppose that the ptilolite must be considered as a common mineral. I think, then, that it will be proper to give a full description of the mineral, as many of its properties, especially the crystalline form, are hitherto rather imperfectly known.

Occurrence. All the occurrences of the ptilolite which I have been able to ascertain are listed below in topographical arrangement.

The Färöes. From Eldevik at Österö we have the two specimens which are described under the okenite (p. 7). The first specimen contains only a thin layer (c. 1 mm) of the ptilolite situated between apophyllite and okenite; the mineral seems not to be quite pure and is rather difficult to determine. In the other specimen there is first a very thin layer of chabasite upon which the ptilolite is seated in form of small radiating masses which are highly penetrated with chalcedony; in the innermost part of the geode there may be apophyllite or okenite.

From Österö THUGUTT, as above cited, describes a mordenite as colourless, finely fibrous and under the mi-

croscopically spherulitic; it is mixed fibrous silica from which it cannot be completely separated. According to that description it is most probable that the mineral in question is a ptilolite, the chemical composition being the same for the two minerals.

From the Färöes without known locality there are in the museum of Copenhagen specimens of two different kinds, which must have originated from quite different occurrences. The one of these is represented by a brecciated basalt whose large fragments are cemented together by a rather compact, snowwhite ptilolite the fibres of which are so small that they are only visible under the microscope, and are irregularly interlaced. While most of the substance is very pure it contains in other places groups of very small, rounded quartz grains.

The second of the mentioned occurrences is very peculiar, the ptilolite occurring in the form of regular stalactites. In a gray basaltic rock there are large cavities, the walls of which are coated with a very thin, green layer of some zeolite penetrated with glauconite. Upon that is seated the ptilolite in a layer of some few millimeters but from the wall it protrudes in the interior of the cavity in the form of stalactites which are in some cases rather regular and parallel, but in others more or less flattened and curved. In the interior of each stalactite we find the same green zeolitic mass as is found in the outer part of the cavity. The ptilolite itself is seemingly very pure; the first formed layers forming the outer parts of the coating of the walls and the inner parts of the stalactites are compact, while the later formed parts are rather loose. The single fibres are so thin that they can only be seen under the microscope.

Iceland. Besides the formerly known locality, Teigarhorn, I have succeeded in finding the mineral from

three other places. As the Museum in Copenhagen contained a very small material of fibrous zeolites from Iceland, I wrote to the lector B. SÆMUNDSSON in Reykjavik and asked him to send me what he possessed of those, and in a not very large collection the three new occurrences were found. It seems, consequently, that the mineral must be rather common in Iceland. The known occurrences are:

1. Teigarhorn. The mineral from here¹ is the most perfect and pure form of all ptilolite as it is mixed with no other mineral with the exception of small inclusions, which are found in some instances, and which can not be more exactly determined. The surrounding rock is a gray basalt; the outer part of the geode is filled by a compact mass of ptilolite from which the shining and well-developed crystals freely protrude. Only in few cases heulandite is found as a later formation and sometimes the spaces between the ptilolite are filled by small, spindle-shaped quartz crystals.
2. Laxfoss at Grimsá. Small geodes without surrounding rock: the ptilolite is of the common loose and hairy form but in the outer parts it is incrustated with chalcedony forming outermost a compact layer of ca. 1 millimeter, inside of which there are found scattered, regular small spheres.
3. Hunavatn. As from the former locality here are found small geodes (up to 2 centimeters in diameter) without rock: the ptilolite has the form of well-developed straightlined needles and their formation has been succeeded by heulandite which fills up the spaces between the ptilolite in the outer parts of the geodes.

¹ As Miss CALLISEN points out one of the specimens is labelled "Eskefjord?" but the whole appearance shows that it must have come from the same locality as the others, viz. Teigarhorn, the most famous place in the world for large and well-developed zeolites.

4. Thorskufjarðar Heiði. From here we have a single larger geode without rock; the ptilolite is quite pure with very fine needles of a loose and feltlike consistency.

East-Greenland. At the south side of Gaasefjord in Scoresby Sound there has been found a piece of basalt with numerous amygdaloids consisting of pure ptilolite of the common feltlike appearance.

West-Greenland. On the island of Disko there are three localities for ptilolite: 1. Nungerut, near the coal mine Ritenbenk, at the north-east coast of the island. From here we have a rather large (up to 8 centimeters) geode, which has outermost a layer of ca 5 millimeters of ptilolite of the common appearance, while the whole interior is filled up with desmine. 2. At Skandsen is found a large geode (up to two decimeters in diameter) of a fine appearance with a green outside and a pure snowwhite interior, as it is in most cases entirely filled up by a pure, loose, feltlike ptilolite whose single fibres are exceedingly thin. In some places in the outer parts of the geode there are crystals or grained masses of apophyllite, which mineral has crystallised before the ptilolite, as it is never penetrated by that mineral. 3. Kuanit at Godhavn. From here originates a large geode almost completely filled with ptilolite of the common feltlike form with very fine fibres. It is however not quite pure as it is, especially in the outer parts, mixed with chalcedony, mostly in the form of small, regular spheres, formed after the ptilolite.

Franz Joseph Land. At Teplitz-Bay at Crown-prince Rudolf Island is found, as described by COLOMBA¹, a specimen of calcite penetrated by needles of ptilolite; the

¹ l. c.

specimen originates from a cavity in basalt. The needles of the ptilolite are long, colourless and flexible with silky luster.

Italy. From this country the following three localities for the mineral are known:

1. Fassa in Tyrol. In an augite porphyry irregular cavities and fissures are quite filled with different minerals; sometimes there is a red heulandite without ptilolite, but in the cavities which interest us here there is outermost a layer of gray chalcedony without ptilolite, while the whole interior is filled with red chalcedony, or in some cases calcite, both penetrated with very fine fibres of ptilolite. The whole specimen is labelled crocalite, and it is very probable, that that name ought to be referred to the ptilolite and not, as is commonly the case, to natrolite. If we compare the different descriptions of the crocalite, especially those by HAUY¹: "Ce minéral est engagé sous la forme de globules dans une roche de trapp amygdaloïde, qui renferme en même temps des grains de pyroxène et de petites masses de stilbite rouge. Il est lui-même d'un beau rouge incarnat, et point électrique par la chaleur; sa cassure est mate et sa dureté peu considérable", by LEONHARD²: "Der sogenannte dichte Zeolith (Mesotype compacte, Krokolith), namentlich jeder aus Tyrol, ist einer, äusserlich oft nicht mehr erkennbares, Gemenge von Quarz oder Hornstein mit aufgelöstem Mesotyp oder Stilbit" and by GLOCKER³: "Der sogenannte Krokolith aus dem Fassathale wird für eine Gemenge von Quarz mit Mesotyp, nach anderen mit Stilbit gehalten," with that given above of the locality, we shall see that they are in most respects very similar, and it is, there-

¹ Cours de Min. de l'an XII; Lucas: Tabl. méthodique des Espèces Min. 1806, 334.

² Handbuch der Oryktognosie, 1821, p. 455.

³ Handbuch der Mineralogie, 1831, p. 788.

fore, most natural to refer the crocalite to the ptilolite, as long as no natrolite or other mineral is known, of the same appearance and occurring under similar circumstances, from that locality.

From the same locality perhaps originates a mineral, described by THUGUTT¹ under the name of mordenite; the locality is given as Seiser Alp. The mineral is needle-shaped of a pink colour and is accompanied by analcite, calcite and quartz. Those qualities fairly well recall the above stated, but more difficult to explain is the statement that there should be an obliquity of extinction of $7-8^{\circ}$ and a cleavage forming $3-4^{\circ}$ with the horizontal direction. Both qualities are not in very good accordance to those of either the ptilolite or the mordenite and are, perhaps, not exactly determined.

2. The valley of Zuccanti in the district of Vicenza. From here the Museum possesses two specimens consisting of a basaltic rock, the cavities of which are filled with a radiated ptilolite of a strong brick-red colour. Beside that mineral there are sometimes found, in the outer parts of the cavities, masses of calcite, which is obviously formed before the ptilolite while the inner parts of the geodes, the spaces between the needles, are filled up with a grained quartz. While the needles in one of the specimens are exceedingly fine, as is most commonly the case with the mineral, the other specimen is very remarkable by the fact that the crystals are of such large dimensions that it has possible to use them for crystallographical and physical examinations besides those from Teigarhorn and Elba.

3. Speranza at St. Piero in Campo, Elba. The mineral from there was first mentioned by GRATTAROLA² and after-

¹ l. c.

² Bolletino del R. Comitato Geologico d'Italia. 7, 1876, p. 323.

wards by SANSONI¹ under the name of "hydrocastorite", which mineral, as suggested by D'ACHIARDI², is perhaps only a mixture of stilbite and ptilolite. The last named author points out that those two minerals are intimately mixed at that locality, where moreover the following zeolites are stated to occur viz. heulandite, chabasite, "foresite" and dachiardite. The zeolites are situated on the walls of the cavities of a granite pegmatite, the most characteristic minerals of which are tourmaline, beryl, castor and pollux. As will be seen, the occurrence differs highly from all others known for the ptilolite.

A small specimen of the ptilolite from Elba, which the Museum in Copenhagen succeeded in obtaining, is very remarkable by the fact, that it contains larger crystals of the mineral than those formerly described from that locality. GRATTAROLA gives the dimensions 0.002—0.0425 mm, while D'ACHIARDI uses the expression "un minerale aciculare esilissimo" (very fine needle-shaped). The crystals which I have measured have a thickness of up to 0.3 mm and are very convenient for goniometrical measurements; while most of them are broken in the ends, I have succeeded in finding a few, which were in possession of pyramidal faces, as will be described later on.

Scotland. From Dumbarton the Museum of Copenhagen possesses a specimen of the mineral. The surrounding rock, of which only small remnants are left, seems to be of a trachytoid character; the walls of the cavities are externally coated with a thin layer of grained quartz and sometimes also with small crystals of heulandite. Upon that layer is placed the ptilolite, which has, as usual,

¹ Mem. Soc. Toscana Sc. Nat. 4, 1879, p. 311.

² l. c.

the form of radiated groups; the whole space between the needles of the ptilolite is filled out by grained quartz and sometimes by larger individuals of calcite. The ptilolite is of a strong brick-red colour; the single needles are very thin and insignificant.

United States.

1. Table and Green Mountains, Colorado. This locality, which is the original one for the mineral, consists of an andesitic rock, the pores of which are coated by chalcedony. In some instances this mineral or quartz fills the inner part of the cavity, but in other cavities there is upon the chalcedony deposited heulandite or ptilolite. In one specimen, which the U. S. National Museum kindly sent me for examination, I found in many of the cavities, either alone or together with the ptilolite, small crystals of baryte. The dimensions of that mineral are in some cases one to a few millimeters, while in others they are quite microscopical and lie in a large number scattered among the needles of the ptilolite. The ptilolite itself from that locality is very insignificant, the transverse dimensions of the needles being almost 0.001 millimeters; the needles are only to a very small degree parallelly arranged as they, more than is the case at the other localities, form loose, feltlike masses.

2. Silver Cliff, Custer Co., Colorado. This locality has, like the former, been described by CROSS and EAKINS; the rock is a devitrificated pitchstone belonging to a rhyolitic lava-flow: the small vesicles are coated and in some cases quite filled by quartz, while others contain baryte or ptilolite, which mineral has great similarity with that from the former locality.

3. Challis, Idaho. This locality consists, as described

by KOCH, of a basic rock with rather large (up to 1 dm in diameter) cavities, on the walls of which there is a 1 cm layer of chalcedony on which the ptilolite rests mixed with numerous microscopic spindle-shaped crystals of quartz. In a specimen from the locality, which I got from the U. S. National Museum, it was obvious, that the unusual thick outer layer must be divided in two: an outer, one of 1—2 mm, formed before the ptilolite, and an inner one penetrated by needles of that mineral. The two layers were separated from each other by a distinct line of demarcation while there is a gradual transition from the inner layer to the loose ptilolite. That mineral itself is arranged in small radiated groups, the single needles are very thin.

Salomon Islands, Guadalecanar. From here, as described by TSCHERMAK¹, we have small (3 cm in diameter) white spheres in some volcanic rock. The analysis by Cossmat shows that the material must have been rather pure.

As will be seen from the foregoing the occurrences of the ptilolite are in most respects very similar to those of other zeolites, the surrounding rock being mostly of basaltic character and only in a few cases more acid, andesitic or granitic. The associations are very variable for the different localities. Of 19 known occurrences there are 5, where the ptilolite is the only mineral, while in the other instance it is accompanied by other zeolites, by quartz (or chalcedony), calcite or baryte. Zeolites are in 6 instances found together with the ptilolite; they are of many different kinds and are in some cases formed before and in some after the ptilolite. Calcite is found from four of the localities mentioned; it is mostly formed after the ptilolite, only at Zuc-

¹ Sitzb. Akad. Wiss. Wien, 126, I, 1917, p. 547.

canti it seems to be of an earlier formation. Baryte is found at the two localities in Colorado, in both cases as a later formation. Most characteristic is the common association of the ptilolite with chalcedony or quartz, which circumstance is, perhaps, due to the high acidity of that zeolite, which contains much more silica than other zeolites with the exception of the mordenite. In 9 instances the ptilolite is connected with quartz, which mineral is sometimes formed before and sometimes after the ptilolite, while in some cases it is of both formations. It is in most cases impossible to determine if the mineral in question is quartz proper or chalcedony, as it mostly form a very fine-grained mass.

Crystalline form. The system is commonly assumed to be rhombic because of the parallel extinction; only Miss Callisen suggests the monoclinic symmetry for the mineral from Teigarhorn (the "flokite") as it has a distinct oblique extinction on (010) connected with a twin formation after (100). As all other essential properties are alike for the mineral from that locality and from others, it will be most natural to assume that there is some optical anomaly, so much more as those crystals show anomalies also in other directions. Besides the constant obliquity of 5° on (010) there is in some instances found an obliquity of $1-2^\circ$ on (100) and also very variable extinctions in transverse sections. As all the better crystals from other localities show absolute parallel extinctions in all three directions, we must assume that the mineral is in reality rhombic.

Distinct terminal faces have not been observed before; for the mineral from Green and Table Mountains CROSS and EAKINS state that the terminations of unbroken

prisms are square, and also COLOMBA mentions that the crystals from Franz Josef Land often possess a basis normal to the directions of the needles. As for the crystals from Elba, Grattarola states that the prisms are terminated by a face which is either at a right angle to the direction of the prism, or forms an angle of 70° with this direction; D'Achiardi has found two symmetrically arranged terminal faces. As for the crystals from Teigarhorn Miss CALLISEN has found no terminal faces but has made the first measurements of the prismatic angle for which she has found the value $(100):(110) = 41^\circ 18'$ ($40^\circ 35' - 42^\circ 12'$).

As material for crystallographical examination has been used the crystals from Teigarhorn, from Zuccanti and from Elba as their dimensions exceed all other pitilolites. Most crystals are somewhat ruler-shaped and flattened later (100) the dimension after the b-axis being in maximum ca. 0,3 mm and after the a-axis ca. 0,1 mm from all three localities. Some of the crystals from Teigarhorn are, however, rather equidimensional in both directions and others are flattened after (010).

On the crystals from Zuccanti I have not found any terminal faces, but on these from Elba and Teigarhorn I have succeeded in finding such. As I was in possession only of a very small material from Elba, I found but two crystals which were terminated by the pyramide (111) with all four faces on each crystal. Among the numerous crystals from Teigarhorn several were found in possession of the form n (101) without any trace of the pyramid.

The crystals are rhombic with the elements:

$$a : b : c = 0.8785 \ 1 : 0.3606.$$

The crystals from the two localities are developed as shown in the figures 3 and 4. As fundamental angle is

used the prismatic angle $(100):(110)$, which was measured by Miss CALLISEN to $41^{\circ} 18'$ and for which I have found very similar values on the crystals from Elba and Zuccanti. As the other fundamental angle I have used the value of ϱ for the face o (101), which I have found to be $22^{\circ} 49'$ as a mean value of 9 measurements varying from $22^{\circ} 30'$ to $23^{\circ} 10'$. As the value of ϱ for p (111) I have found $29^{\circ} 8'$ varying from $28^{\circ} 47'$ to $29^{\circ} 30'$; the calculated value is $29^{\circ} 15'$.

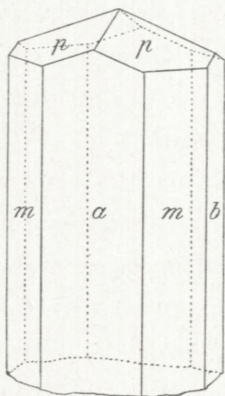


Fig. 3.
Ptilolite. Elba.

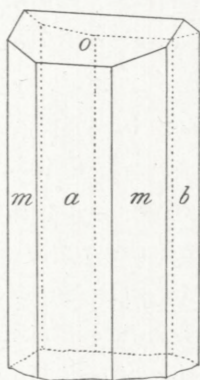


Fig. 4.
Ptilolite. Teigarhorn.

The faces in the vertical zone are always vertically striated, and give mostly numerous reflexions; on the contrary the faces of p and o are well developed and give single reflexions, which, however, are very weak because of the extreme smallness of those faces.

Physical properties. Cleavage. CROSS and EAKINS state that there are parallel to the basal plane traverse fissures as of cleavage. I have never succeeded in finding such and on broken prisms which I have placed on the goniometer I have seen no reflexion in the place of the basis, so I think that there can be no traceable cleavage in that di-

rection. The same result is obtained by Miss CALLISEN who states that there is conchoidal fracture normal to the prism zone; on the contrary she has found an excellent cleavage after (100) and (010). In my opinion there is, however a marked difference between those two directions. When we see the traverse sections of the needles, we always find numerous fissures after (100) but mostly only few after (010), and if we observe the needles themselves there seems to be a more marked pearly luster after the first named face; this observation is, however, rather uncertain because of the smallness of those faces. As a general result I would describe the cleavage after (100) as excellent and that after (010) as distinct.

The outer appearance of the mineral is very varying in the different cases. Sometimes the single crystals freely protrude and are well developed but in most cases they are connected to aggregates, which are mostly of a rather loose consistency but sometimes very compact; it seems, however, that the ptilolite in all those cases is impregnated with quartz. The aggregates sometimes consist of distinct radiated groups but sometimes the fibres are so interlaced that the mineral becomes perfectly felt-like. In a single instance, from the Färões, the ptilolite is arranged in stalactitic forms.

The colour of the aggregates is in most cases a very pure white, sometimes with a faint reddish, yellowish or brownish tinge. A very marked exception from all other ptilolites are the three occurrences, Fassa, Zuccanti and Dumbarton, from which places the mineral is of a strong brickred colour, very similar from all three occurrences. The colour seems to originate from very small inclusions, the nature of which it is impossible to determine.

The hardness is, as determined by Miss CALLISEN,

5. For the specific gravity KOCH has given the value 2.30 while Miss CALLISEN has found the value 2.102. As this seems to be a rather large discrepancy I have tried to determine the gravity and have found; for the pure crystals from Teigarhorn and from Elba, values varying from 2.10 to 2.12; only for the red crystals from Zuccanti have I found values up to 2.3 or even higher. From the other localities the crystals are so small that it will be impossible to get any exact result.

The optic properties are mostly in perfect accordance with the rhombic symmetry: only the crystals from Teigarhorn show some anomalies, as mentioned above. From the other localities the crystals have a parallel extinction in all directions and the sign of the needles is negative, which in connection with the weak refraction and double refraction is the most valuable property for determining the mineral. The plane of the optic axes is parallel to (100) and the acute bisectrix is normal to (001). The sign of the double refraction is negative. The axial angle is observed with great difficulty because of the smallness of the crystals; by placing one of the crystals, which is flattened after (010), between glass hemispheres and turning round, we can see the positions, in which there is no double refraction and where the sign by further turning changes from negative to positive, and thereby we get the obtuse axial angle of almost 120° in glass and $2V$ to 57° app.

The indices of refraction have been given by D'Achiardi: $\alpha < 1.480$, $1.485 > \gamma' > 1.480$, by Koch: $\alpha = 1.475$, $\beta = 1.477$, $\gamma = 1.478$ and by Miss Callisen: $\alpha = 1.4720$, $\gamma = 1.4736$. The double refraction is directly determined by Miss CALLISEN to be 0.002. The most obvious phenomenon in the numbers mentioned is the marked difference between the

mineral from Elba on the one side and the other occurrences on the other side. But it is very easily seen that there exists in reality such a difference, if we place the mineral in ricinus oil ($n = 1.480$); while the ptilolite from most occurrences is distinctly lower refracting than the oil, that from Elba and from one of the other localities (Thorskuðfjarðar Heiði on Iceland) has almost the same refraction as the oil or a little larger. It is probable that the difference in refraction is due to some difference in chemical composition and if we compare the best analysed occurrences, Elba and Teigarhorn, we shall see that the mineral from Elba contains almost 4 per cent of $SiO_2 + Al_2O_3$ less than that from Teigarhorn and correspondingly almost 3 per cent more of lime + alkalis, which is perhaps sufficient to explain the larger refraction of the mineral from the first named occurrence.

By heating the needles undergo curious alterations; COLOMBA has found that they become double refracting at a temperature of 120 to 125°, also the very thin ones, on which it is not possible to see any interference colour at ordinary temperature; by cooling they go back to the original condition. Miss CALLISEN has found that the crystals at 117—118° change their sign and get positive in the longitudinal direction but by cooling they become normal again. Both statements are correct; by heating the crystals first lose their double refraction, and thereafter get a double refraction which is much stronger than the ordinary, so that p. i. a crystal, which from the beginning shows a white of the first order, after heating goes up to red of second order. By further heating this colour remains very constant and by cooling the whole process goes back, but it takes rather a long time, one to two hours, before the original state is restored throughout the whole crystal.

The fusibility is somewhat differently stated by the different authors, from difficult to easy. I think that the cause of the divergent opinions is the fact that, if we take a single crystal, which is always very thin, we shall see that it is easily melted in the common Bunsen burner, but if we take a more compact piece it will be melted by the blow pipe only to a small degree. The fusibility is certainly more difficult than for all other zeolites with the exception of the mordenite and must be estimated at a value between 3 and 4. On the other hand all authors agree that the mineral is not dissociated by hydrochloric acid. It is quite certain that the properties which place the two minerals apart from other zeolites, are due to the exceptionally high percentage of silica, which lies between 67 and 70 in the two zeolites while in all others it never goes up over 60.

III. Intergrowths of different needle-shaped zeolites.

What makes the determination of the zeolites in question rather difficult and complicated is the fact that in many cases they have grown contemporaneously and form a mixture which is in some cases rather intimate. Only in some cases a more regular intergrowth is formed, but in most instances it is not possible to state any other regularity than the fact that the longitudinal direction of the two minerals is more or less strictly parallel, while the other directions seemingly are more accidentally orientated.

As far as I can see only two instances of intergrowth are hitherto described, and they are both of the more regular kind. The first instance is the combination of mesolite with natrolite, which has been described by CESÀRO¹

¹ Bull. de l'Acad. r. de Belge (Cl. des Sc., nr. 4, 1909, p. 486).

and by GÖRGEY¹, and the other is that of natrolite and thomsonite described by HIBSCH². Of those I have only found instances of the first combination, which seems to be rather common. On the other side of the more irregular intergrowth I have found the following combinations: mesolite-natrolite, mesolite-thomsonite, mesolite-scolecite, natrolite-scolecite, and natrolite-thomsonite of which the last seems to be rather common.

Mesolite-natrolite.

This combination, which has been described by Görgey from the locality Friedrichsthal at Bensen near Böh-mish-Leipa, consists in the lower parts of the crystals of natrolite, whereupon follows the mesolite while the natrolite again forms the upper part. The boundary lines between both minerals are sharp but somewhat irregular, in most cases forming an angle with the point turned upward. After CESÀRO the mesolite is the first formed mineral, the needle consisting half of that mineral and half of natrolite. As Cesaro, however, in his drawing has the point of the angle turned downward, it is possible that he has turned the first formed crystal incorrectly, as it is not very probable that the first formed crystal should have ended in in a reentrant angle.

In all the specimens which I have had occasion to examine, I have only found a combination of first formed natrolite and later formed mesolite, and the angle, which is formed by the boundary line, is turned with the point upward. In some instances there are however signs of a later formation of natrolite, which forms a very thin

¹ Tschermak's min. u. petr. Mitt., 28, 1909, p. 97.

² Tschermak's min. u. petr. Mitt., 34, 1917, p. 196.

outer coating upon the mesolite, distinctly visible, however, because of the double refraction of the natrolite. Most of the specimens originate from Nolsö, one of the Färöes, while others whose locality is not stated seem to have come from the same place. Only one specimen originates from Lyngmarksfjeld near Godhavn on the island of Disko, Greenland.

As some of the crystals were rather large and well developed, I have measured them on the goniometer to see how the two minerals were arranged. I found that in that respect was there some variation, as in some instances the prismatic faces of both were orientated exactly in the same zone, but that in others they would diverge up to half a degree. In the instances where the *c*-axes of both minerals were parallel the prisms were mostly arranged in such a manner that the bisectrices of the prismatic angles were parallel, whereby the differences in the positions of the corresponding prismatic faces were as small as possible. In other instances the arrangement was such that one pair of prismatic faces nearly coincided in both minerals.

In other cases the two minerals are more irregularly connected. A specimen from Nova Scotia consists of rather big and straight crystals of mesolite, between which there are found masses of very fine fibrous natrolite with rather irregular arrangement of the single fibres. Between those are intermingled small needles of scolecite.

In other cases again there seems to be a much more intimate mixture of the two minerals and it may be rather difficult to determine them with certainty especially the natrolite. The mixture is white and intransparent and has almost the same refraction as the mesolite, but instead of being single refracting, as is the case with the pure mesolite

when in thin crystals, it is distinctly double refracting with a positive sign in the direction of the needles. It is possible that the mesolite is mixed with a smaller quantity of natrolite, not so much, however, that the refraction is sensibly smaller than that for the mesolite. Such (positive) mesolite I have found from Suderö, one of the Färöes, from Iceland and from Turner Island in East Greenland.

Mesolite-thomsonite.

This combination I have found only in one specimen from Cape Brewster in East-Greenland, where it forms radiated masses, on the outside of which there are seen free crystals of both minerals among each other. In thin sections they are mostly intimately mixed in parallel positions, part of the thomsonite crystals being, however, orientated in traverse or accidental positions.

Mesolite-scolecite.

This combination is somewhat differently developed; in a specimen from Mount Henry, East Greenland, the mass is formed by rather big and straight crystals of scolecite, between which there is a very fine and silky mesolite, but in a specimen from Eskifjord, Iceland, and another from Iceland without further locality, the opposite is the case. Here the crystals of mesolite are rather straight and solid and the scolecite is developed as fine fibres between them. In the outer parts of the spherical masses the mesolite, however, passes into fine fibres, which in feather-like arrangement loses itself in the scolecite and afterwards disappears so that the free ends of the crystals are only formed of that mineral. On a specimen from Bordö, the Färöes, both minerals are rather fine, and fin-

ally we have a specimen from Turner Island, East Greenland, where the constituents are so fine, that in most cases they cannot be distinctly distinguished from each other under the microscope. As the mesolite makes up the larger part of the mixture, the refraction of this is very nearly the same as that of the pure mesolite, but the presence of the scolecite makes the sign of the double refraction negative in the direction of the needles. We have here, accordingly, a "negative" mesolite as a perfect analogy to the above named positive one.

Natrolite-scolecite.

Beforehand we should find it rather improbable that these two minerals could be formed at the same time, but in the above mentioned specimen from Nova Scotia we certainly have a fibrous natrolite with single fibres of scolecite; the mixture of both minerals fills out the spaces left between larger crystals of mesolite.

Natrolite-thomsonite.

While I have not had occasion to observe any regular intergrowth between these two minerals like that described by Hibschi I have in many instances found the two minerals grown together in such a manner that the *c*-axes of both were parallel or almost parallel without it being possible to find any other parallelism between them. The individuals of thomsonite are always elongated after the named axes and behave quite like a typical needle-shaped zeolite. The needles of both minerals are always rather thin so that it has been attended with some difficulty to determine them with certainty. Mostly the natrolite is the most regularly developed mineral occurring

in straight needles, between which the needles of thomsonite are placed in a somewhat more irregular manner. In some cases there is, however, no marked difference between the behaviour of both.

The combination of natrolite with thomsonite has been found in large amounts on Nolsö, one of the Färöes; from the spherical masses of them protrude crystals of both minerals, but while those of thomsonite are very imperfect, those of natrolite are mostly well developed and in their distal ends regularly intergrown with mesolite as mentioned above. Another instance of the combination natrolite-thomsonite is found at Præstfjeld, Suderö, the Färöes.

In Greenland the minerals are found at the localities Ekorgfat, Ujarartorsuak, Tuapagsuit and Kaersuarsuk on the north side of Nugsuak and at Ivnersuit at the south side of Disko. No special interest is connected with those localities.

From Antrim in Ireland the Museum possesses some specimens, labelled "Harringtonite" or "Antrimolite"; they both consist of the combination of natrolite with thomsonite and are found as small geodes in basalt. It is, however, not possible to conclude that the said two Irish minerals would have the same composition in other instances. This can only be proved by an optical examination of the original material. The original analyses are in very good accordance with the composition of the mesolite, while a mixture of natrolite and thomsonite would produce a somewhat different result.

IV. Scheme for the Determination of the Fibrous Zeolites.

If we wish to undertake an exact and not too slow determination of the six zeolites mentioned in this paper, viz.

the okenite, the ptilolite, the natrolite, the mesolite, the scolecite and the thomsonite, I think that it is best done by means of the optical properties, especially the refraction, and I have found it practical to use the fluids mentioned below for the last named determination. Naturally it is not excluded that other zeolites may exist as fibrous aggregates or as needle-shaped crystals, but of the minerals of that kind, which have been described, e. g., the metanatrolite and the erionite, I have had no material for comparison, and I think that all other fibrous zeolites than the first named six will prove to be very rare, and they will probably be detected by the fact that they are not in full accordance to the optical properties stated below. The optical signs (positive or negative) given in the scheme are only in relation to the direction of the needles, as the real (absolute) signs are in all cases very difficult to determine. As standard fluids I have used such as are rather constant and not very volatile. They are:

1. Nelk oil ($n = 1.5415$).
2. Chlorbenzene ($n = 1.524$).
3. Cedar oil ($n = 1.512$).
4. Ethylbenzoate ($n = 1.505$).
5. Ricinus oil ($n = 1.480$).

For the six minerals in question the essential optical properties are the following:

1. Okenite. Extinction in single crystals parallel, in aggregates oblique (up to 34°). Refraction nearly the same as for nelk oil. Double refraction rather strong (ca. 0.01), positive.

2. Thomsonite. Extinction parallel. Refraction (β) almost the same as that of chlorbenzene¹. Double refraction

¹ The indices of refraction of the thomsonite seem to be somewhat

strong (up to ca. 0.02, negative), or weak (up to ca. 0.005) positive, changing sign if the needle is turned round.

3. Scolecite. Extinction oblique (up to ca. 17°). Refraction for the almost vertically swinging ray (α) exactly as for cedar oil. Double refraction mean (ca. 0.007), negative.

4. Mesolite. In most cases no double refraction (when in thin needles), in some instances, when impure, weak positive or negative double refraction. Refraction very nearly the same as for ethylbenzoate.

5. Natrolite. Extinction parallel. Refraction for the horizontally swinging rays (α and β) nearly the same as for ricinus oil. Double refraction rather strong (ca. 0.01), positive.

6. Ptilolite. Extinction parallel. Refraction nearly the same as or somewhat lower than that of ricinus oil. Double refraction weak 0.002—0.003, negative.

variable, but in most cases the lower values (α and β) are not very far from that of chlorbenzene while that of γ is much higher. The values given by Descloizeaux ($\alpha = 1.497$, $\beta = 1.503$, $\gamma = 1.525$) are certainly much too low).



MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKELSSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7 RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse »NH ₂ COONH ₄ + H ₂ O ⇌ (NH ₄) ₂ CO ₃ « und »CO ₂ + H ₂ O ⇌ H ₂ CO ₃ «. 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922.....	0.60
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Intéropolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingsningskredse. 1922.....	0.70
6. PRYTZ, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922 ..	0.75
7. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922	2.15
8. BØGGILD, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). 1922	1.40
9. WIEDEMANN, E. und FRANK, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922	0.75
10. PEDERSEN, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. 1922	3.25

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 9.

ÜBER DIE KONSTRUKTION DER
SCHATTENLINIEN AUF HORIZONTALLEN
SONNENUHREN VON TĀBIT BEN QURRA

VON

E. WIEDEMANN UND J. FRANK



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 0,75.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 9.

ÜBER DIE KONSTRUKTION DER
SCHATTENLINIEN AUF HORIZONTALLEN
SONNENUHREN VON TÂBIT BEN QURRA

VON

E. WIEDEMANN UND J. FRANK



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Aus der Antike einschliesslich der byzantinischen Zeit sind uns zahlreiche Sonnenuhren in den verschiedensten Konstruktionen erhalten¹, auf denen die Linien, die der Schatten von dem Ende eines Gnomons im Laufe des Jahres beschreibt, mit grosser Genauigkeit verzeichnet sind. Zum Teil sind diese Linien wohl durch Versuche an Modellen ermittelt und dann auf andere Sonnenuhren übertragen worden, zum Teil sind sie aber wohl auch auf Grund von theoretischen Betrachtungen konstruiert worden. Soweit diese Linien Kegelschnitte sind, werden sie in der vorislamischen Zeit punktweise gezeichnet², da erst von den Arabern Kegelschnittzirkel erfunden wurden.³ Schriften über die Theorie dieser Schattenkurven sind uns aus dem Altertum auch nicht dem Titel nach, soweit wir wissen, erhalten. Jedenfalls haben aber PTOLEMAEUS u. a. die Theorie gekannt, ergab sie sich doch im wesentlichen aus dem Werk von APOLLONIUS über die Kegelschnitte. Die älteste Schrift über die Theorie, die wir kennen, stammt von dem hochbedeutenden arabischen Gelehrten TÂBIT B. QURRA⁴ (826—901),

¹ Vgl. hierzu H. DIELS, Antike Technik S. 155. 1920.

² Zwar kannte schon ANTHEMIUS († 534) die Konstruktion der Ellipse mit dem um zwei Punkte gelegten Faden, doch ist uns nicht bekannt, ob die Konstruktion damals schon praktische Anwendung fand. Vgl. F. WIEDEMANN, Weltall 20, 26. 1919.

³ Vgl. E. WIEDEMANN, Zeitschr. für Vermessungswesen Heft 22-23, 1-16. 1910 und F. WOEPCKE, Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque impériale etc. 22, 23 und 123. 1874.

⁴ E. WIEDEMANN, Beitr. LXIV. Sitzgsbr. d. phys. méd. Soz. in Erlangen 52-53, 1921, und H. SUTER, Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften Heft 10, 34. 1900.

der durch seine berühmten Übersetzungen des Werkes von APOLLONIUS die Araber mit diesem bekannt machte. Die Schrift von TĀBIT ist in dem Escorial vorhanden und in dem Katalog von CASIRI I, 386, Nr. 955 aufgeführt; jetzt hat die Handschrift die Nr. 960.

Aus dem Titel »Thabeti Ben Corrah Tractatus De Horometria« in dem Katalog von CASIRI ist zunächst wenig zu entnehmen. Der eine von uns hatte sich die vorhergehenden Seiten der arabischen Übersetzung der Schrift von MENELAUS mit dem Titel: Das Werk des Menelaus gerichtet an König DOMITIAN »Über den Kunstgriff, durch den man die Menge eines jeden Körpers bestimmen kann, der in einer Anzahl von gemischten Körpern enthalten ist« — sie wird in deutscher Bearbeitung von Prof. J. WÜRSCHMIDT im Philologus veröffentlicht — photographieren lassen. Dabei war auch die erste Seite der Schrift von TĀBIT mit dem unten mitgeteilten Titel abgebildet, deren Inhalt unser lebhaftes Interesse erregte. Dank der Vermittelung von Herrn Prof. Dr. WINTZ in Erlangen und der Güte von Herrn P. KNAPPE in Madrid erhielten wir aus dem Escorial eine weiss-schwarze Photographie unseres Textes, der von fol. 51 r bis 54 r reicht; an ihm schliesst sich bis 54 v eine kurze mathematische Abhandlung. Die Handschrift ist in magrebinischer (nordafrikanischer) Schrift nicht schlecht geschrieben und enthält kaum Fehler; dagegen lassen die Zeichnungen zu wünschen übrig; sie waren auch als räumliche Darstellungen schwierig herzustellen. Indessen zeigt sich, sei es, dass die Figuren von TĀBIT selbst, sei es, dass sie von einem Abschreiber herrühren, ein lebhaftes Bestreben, sie perspektivisch zu zeichnen. So werden die Kreise als Ellipsen, die allerdings aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt sind, wiedergegeben. Wir teilen die zu der

Proposition B 2 gehörende Figur mit. Siehe weiter unten und Figur 1.

Statt im folgenden etwa die arabischen Figuren in entsprechende moderne umzuzeichnen und an ihnen die Gedankengänge zu verfolgen, ist nur ihr Schnitt mit der Meridianebene gezeichnet. Ihr Schnitt mit der Ebene des Horizonts ist der Übersichtlichkeit wegen unverhältnismässig weit entfernt von der Gnomonspitze gezeichnet. Die

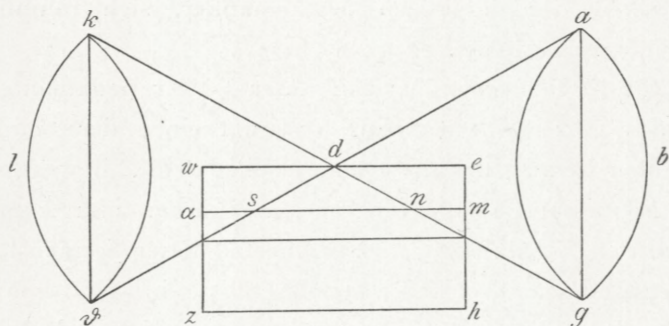


Fig. 1.

vorkommenden kleinen Buchstaben sind dem arabischen Text entnommen, die grossen sind von uns hinzugefügt.

TĀBIT stellt sich in seiner Schrift die Aufgabe, die Kurven zu ermitteln, die der Schatten des Endes eines Gnomons auf einer horizontalen Fläche beschreibt und zwar für alle Orte der Erde und für alle möglichen Stellungen der Sonne im Tierkreis. Er behandelt daher folgende Fälle:¹

Welchen Schatten beschreibt die Gnomonspitze,

- A. wenn die Sonne in einem der beiden Äquinoktialpunkte steht, an allen Orten,
- B. wenn die Sonne sich in irgend einem anderen Punkte des Tierkreises befindet,

¹ Die Nummerierung der einzelnen Abschnitte ist der grösseren Übersichtlichkeit wegen von uns eingeführt.

- 1) am Nord- bzw. Südpol,
- 2) an einem Ort, für den das Komplement der Polhöhe ($90-\varphi$) grösser als die Ekliptikschiefe (ε) ist,
- 3) an einem Ort, für den $90-\varphi$ gleich ε ist,
- 4) an einem Ort, für den $90-\varphi$ kleiner als ε ist.

Die Ergebnisse werden von TÄBIT nicht auf rechnerischem Wege, sondern aus der Anschauung gefunden. Die Betrachtungen geben erneut einen Beweis für die grosse Fähigkeit der damaligen Mathematiker, sich räumliche Gebilde vorzustellen.

Zur Erleichterung für den Leser sei der Gedankengang TÄBITS kurz wiedergegeben. Er greift einen der Sonnenstrahlen heraus, der die Gnomonspitze trifft. Bewegt sich die Sonne im Laufe eines Tages auf ihrem zum Äquator parallelen Umlaufskreis, so beschreibt dieser Sonnenstrahl einen geraden Kreiskegel, dessen Spitze in der Gnomonspitze liegt, dessen Basis der Umlaufskreis ist und dessen Achse mit der Weltachse zusammenfällt und deshalb senkrecht zur Basis steht. Diesen Kegel nennt TÄBIT »Strahlenkegel«. Die einzelnen Mantellinien dieses Kegels denkt er sich über die Spitze hinaus verlängert. Die Verlängerungen treffen auf einen Kreis der Himmelsphäre, der so gross wie der Umlaufskreis ist und darum vom Äquator um den gleichen Betrag absteht, wie dieser. Dieser Kreis ist der Umlaufskreis der Sonne, wenn sie die gleich grosse Deklination hat, wie im ersten Fall, die jedoch entgegengesetzt gerichtet ist. TÄBIT erhält somit einen 2. Kegel, der die gleiche Spitze, die gleiche Achse und eine gleich grosse Basis, wie der erste hat. Da die Mantellinien des zweiten Kegels die Projektionsstrahlen der Gnomonspitze sind, liefern sie beim Auftreffen auf eine Fläche den Schatten der Spitze. TÄBIT nennt den zweiten Kegel den »Schattenkegel«.

Strahlenkegel und Schattenkegel können vertauscht werden, wenn die Sonne sich auf der Basis des vorgenannten zweiten Kegels bewegt. In diesem Fall ist der zweite Kegel der Strahlenkegel und der erste der Schattenkegel. Der Schnitt der Horizontebene mit dem Schattenkegel liefert die Schattenkurve für die Spitze während eines Tages. TÂBIT verlegt die Ebene des Himmelsäquators in die Spitze des Gnomons, die damit zum Mittelpunkt des Äquatorkreises wird, mit demselben Recht, mit dem man z. B. die Ebene des Horizonts bei astronomischen Berechnungen in den Mittelpunkt der Himmelsphäre verlegt, ohne zu grosse Fehler dabei zu begehen.

In den schematischen Zeichnungen bedeutet $agdk\vartheta$ den Schnitt des Doppelkegels mit der Meridianebene, d die Kegelspitze und zugleich die Gnomonspitze, AA' den Schnitt des Äquatorkreises, ew den des Horizonts. Den Kegeln agd und $k\vartheta d$ in Fig. 1 entsprechen also die Achsendreiecke agd und $k\vartheta d$ in den anderen Figuren und der schneidenden Horizontebene $ewzh$ in der 1. Fig. die gerade Linie ew in den anderen. Die Strecken ag und $k\vartheta$ sind die Durchmesser der Grundflächen der Kegeln. Die Lage des Gnomons ist der Übersichtlichkeit wegen nur in Fig. 3 angegeben.

Die im folgenden mitgeteilte Übersetzung schliesst sich eng an den Text an; nur an wenigen Stellen ist sie, um das Verständnis zu erleichtern, etwas freier gehalten. Am Schluss sind Erläuterungen für die Stellen, für die uns dies erforderlich schien, beigegefügt.

Übersetzung.

Abhandlung (maqâla) von TÂBIT B. QURRA AL ḤARRÂNÎ über die Eigenschaft der Figuren (Kurven), die an jedem Tag und an jedem Ort dadurch entstehen, dass sich das

Ende des Schattens eines Gnomons über die Ebene des Horizontes^{a)} bewegt, es können dies eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Parabel, ein Kreis und eine gerade Linie sein; weiter wird behandelt die Grösse der Durchmesser der erwähnten Kurven, die Lagen ihrer Mittelpunkte und, welche der erwähnten Hyperbeln einander gegenüberliegen.

A. Befindet sich die Sonne in einem der beiden Äquinoktialpunkte, so beschreibt an diesem Tage der Schatten der Gnomonspitze auf jedem Horizont, über den er hingeht, [wenigstens] soweit es die Sinne wahrnehmen können¹⁾, eine gerade Linie, ausser auf dem Horizont des Ortes, der senkrecht unter dem [Welt-]Pol liegt; denn an diesem Ort treffen die Sonnenstrahlen überhaupt nicht auf die Erde (s. Nr. B₁).

Hier, wie bei den späteren Propositionen beruhen die Betrachtungen darauf, dass die Bewegung der Sonne während eines Tages nicht eine derartige ist, dass sie [merklich] von einem Kreis abweicht, der parallel zum Äquator liegt^{b)}.

Es sei abg der Kreis des Äquators, auf dem die Sonne sich [gerade] bewegt, wenn sie sich in einem der beiden Äquinoktialpunkte befindet; sein Mittelpunkt sei d . Zwischen dem Punkt d und dem Ende des Gnomons besteht kein Unterschied [s. o.]. Der Horizont sei $ewzh$. Ich behaupte, dass der Schatten von d zu allen Zeiten des Tages auf der Ebene $ewzh$ eine gerade Linie beschreibt.

Beweis. Die Sonne bleibt bei ihrem Umlauf an diesen beiden Tagen stets in der Ebene des Kreises abg und das Gnomonende, nämlich d , liegt [ebenfalls] in dieser Ebene.

^{a)} Wir werden in Zukunft statt »Ebene des Horizontes« stets »Horizont« übersetzen; gemeint ist immer derjenige des betreffenden Ortes.

^{b)} Die Sonne beschreibt in Wirklichkeit bei ihrem täglichen Lauf keinen Parallelkreis zum Äquator.

Daher bilden die Strahlenlinien, die an diesen beiden Tagen von der Sonne nach d gehen, die Ebene abg ; ferner liegt der Schatten, der von d ausgeht, in dieser Ebene; denn der Schatten liegt stets mit dem leuchtenden Gegenstand und dem diesen verdeckenden [d. h. dem Schatten werfenden] Gegenstand in einer Ebene²⁾ mag dieser Gegenstand ein Punkt oder eine Linie sein. Jede beliebige [Horizont-]Ebene, auf der der Schatten von d an diesen beiden Tagen liegt, schneidet die Fläche des Kreises abg und der durch sie erzeugte Schatten fällt auf die Schnittlinie [der Fläche] des Horizonts und der Ebene des Kreises abg . Die Schnittlinie der beiden Ebenen ist aber eine gerade Linie. Der Schatten von d bewegt sich also auf der Ebene $ewzh$ auf einer geraden Linie, und das wollten wir beweisen.

B₁). Steht die Sonne nördlich vom Äquator, so beschreibt an jedem Tage der Schatten eines Gnomons auf dem Horizont dessen, der [gerade] unterhalb des Nordpols des Äquators sich befindet, einen Kreis. Der Mittelpunkt des letzteren ist der Fusspunkt des Lotes von dem Gnomonende auf diesen Horizont. Steht die Sonne südlich vom Äquator, so tritt das Gleiche für den Horizont dessen ein, der sich unter dem Südpol des Äquators befindet.

Die Sonne stehe an irgend einem Tage nördlich vom Äquator. Der zum Äquator parallele Kreis, auf dem sich die Sonne an diesem Tage bewegt, sei abg und das Gnomonende d . Dann liegt offenbar d nicht in der Ebene von abg , da es in der Äquatorebene liegt. Der Horizont sei für den, der sich unter dem nördlichen Äquatorpol befindet, für den also dieser Nordpol im Zenit liegt, die Ebene $ewzh$.

Beweis. Wir legen die Sonne zu irgend einer Zeit des erwähnten Tages in den Punkt a und ziehen von ihm aus den Strahl nach d , nämlich ad und verlängern ad auf der

anderen Seite bis \mathcal{J} . Offenbar gelangt dieser Strahl zu einem Punkt, der auf einem Kreis liegt, der parallel zum Äquator ist und [auf der südlichen Seite des Äquators] dem Kreis abg gegenüber liegt und dessen Abstand vom Äquator gleich demjenigen von abg von diesem ist. Es ist der Kreis $\mathcal{J}kl$.

Bewegt sich die Sonne auf dem Kreis abg , so dreht sich durch ihre Bewegung die Linie $ad\mathcal{J}$; dabei sind der Punkt d und der Kreis abg beide fest; der Punkt \mathcal{J} bewegt sich dagegen auf der Linie, die den Kreis $\mathcal{J}kl$ umgibt. Die Linie

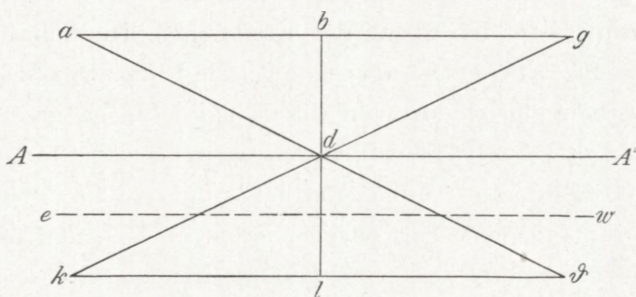


Fig. 2.

$ad\mathcal{J}$ erzeugt durch ihre Umdrehung zwei Kegelflächen, deren Spitze der Punkt d ist¹⁾. Die Basis des einen Kegels ist der Kreis abg , und die Basis des anderen der Kreis $\mathcal{J}kl$; er liegt ihnen [in der eben angegebenen Weise in bezug auf die Äquatorebene] gegenüber und ist parallel zum Äquator. Sein Abstand von diesem ist gerade so gross, wie der Abstand des Kreises abg [vom Äquator]. Über die Fläche des einen von diesen beiden Kegeln, nämlich desjenigen mit dem Kreis abg als Basis, bewegt sich der Sonnenstrahl, über die Fläche des anderen Kegels, nämlich desjenigen mit dem Kreis $\mathcal{J}kl$ als Basis, der Schatten des Punktes d . Jede Ebene, die einen Kegel schneidet und parallel zu seiner Basis liegt, liefert als Schnitt einen Kreis, wie dies

APOLLONIUS in der ersten Proposition des ersten Buches (maqāla) über den Kegel bewiesen hat. Die Ebene des Horizontes, auf der sich $ewzh$ befindet, ist aber parallel zu den erwähnten Grundflächen der beiden Kegel; denn sie liegt auf dem Äquator. Durch den Schnitt des Kegels, dessen Basis der Kreis $\mathcal{J}kl$ und dessen Spitze der Punkt d ist, [mit der Ebene des Horizontes] wird ein Kreis erzeugt. Auf der Fläche dieses Kegels bewegt sich während dieses Tages der Schatten, ohne sich von ihr zu trennen. Es ist nämlich ad die Erzeugende des Schattens von d , d. h. der Spitze des Gnomon, und zwar bewegt er sich auf der Linie, die den Kreis begrenzt, der die gemeinsame Schnittlinie der erwähnten Kegelfläche und der Fläche $ewzh$ ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Ort des Lotes, das wir von dem Punkt d auf die Fläche $ewzh$ fällen; das ist was wir beweisen wollten.

Das folgende soll hier als Erläuterung dienen:

Durch den Umlauf der Sonne entstehen an jedem Tage zwei Kegel, wie wir das beschrieben haben. Der eine befindet sich auf der Fläche des Strahles und der andere auf der Fläche des von der Gnomonspitze entworfenen Schattens. Den Kegel, auf dem die Strahlen liegen, d. h. den Kegel mit dem Kreis abg als Basis, nennen wir den Strahlenkegel und den anderen ihm gegenüberliegenden, nämlich denjenigen mit dem Kreis $\mathcal{J}kl$ als Basis, den Schattenkegel.

B₂) Steht die Sonne nicht in einem der Äquinoktialpunkte, so liefert der Schnitt des Schattenkegels, nämlich des Kegels mit dem Kreis $\mathcal{J}kl$ als Basis und dem Punkt d als Spitze, mit der Ebene $ewzh$ eine Hyperbel. Erfolgt der Umlauf der Sonne auf dem Kreis $\mathcal{J}kl$, so wird zum Schattenkegel derjenige mit dem Kreis abg als Basis und

den Punkt d als Spitze. Seine Fläche schneidet die Fläche $ewzh$ in einer Hyperbel, die der ersten Hyperbel gegenüberliegt. Auf dieser Kurve wandert der Schatten. [Es sei der Punkt s (Fig. 3) der Schatten des Punktes d] zu Mittag, wenn die Sonne sich auf dem Kreis abg befindet, und n der Schatten des Punktes d zu Mittag, wenn die Sonne sich auf dem Kreis kl befindet. Der Mittelpunkt der beiden Hyperbeln ist der Mittelpunkt der Linie sn und das wollten wir beweisen.

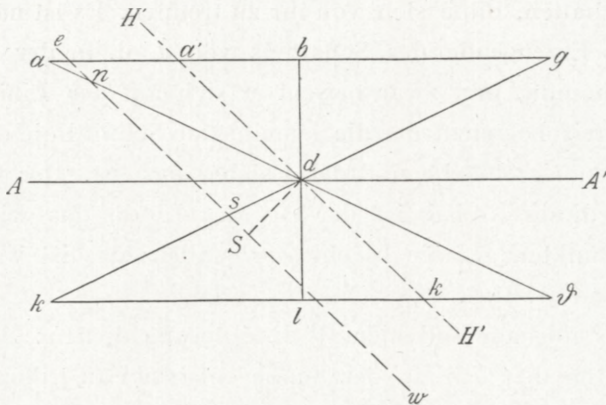


Fig. 3.

B₃). Die Sonne stehe nicht in einem der Äquinoktialpunkte, dann beschreibt [der Schatten] der Gnomonspitze auf dem Horizont an allen Orten, für die die Polhöhe gleich ist der Differenz zwischen der Neigung eines der Wendepunkte [= ϵ] und 90° (d. h. = $90 - \epsilon$) an diesem Tag ein Stück einer Hyperbel, ausser an zwei Tagen des Jahres; nämlich an den zwei Tagen des Jahres, an denen die Neigung [Deklination] der Sonne gleich derjenigen der beiden Wendepunkte ist. An dem einen von diesen Tagen gelangen die Strahlen an diesem Ort gar nicht auf die Erdoberfläche und nicht auf den Schatten irgend eines Gegenstandes (d. h. es entsteht überhaupt kein Schatten). An den an-

deren beschreibt das Ende des [Schattens vom] Gnomon auf dem Horizont dadurch, dass er (der Schatten) sich über ihn hinbewegt, ein Stück einer Parabel. Mit den gegenüberliegenden Hyperbeln verhält sich die Sache so, wie in der vorhergehenden Proposition (Nr. B₂).

Die Sonne möge sich an irgend einem Tage ausser demjenigen des Äquinoktiums auf einem Kreis, der parallel zum Äquatorkreis liegt, befinden, nämlich auf abg (Fig. 4). Die Gno-

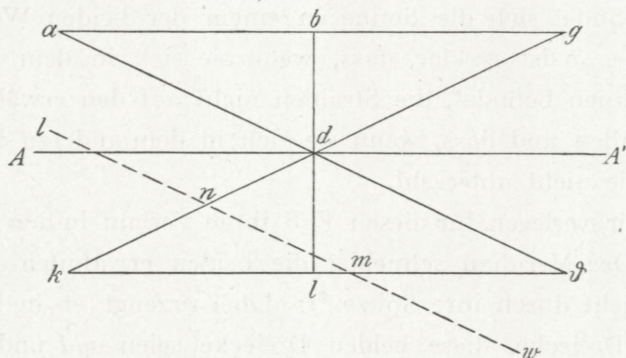


Fig. 4.

monspitze ist d , der erwähnte Horizont $ewzh$. Dann behaupte ich, dass an diesem Tage der Schatten von d sich über ein Stück einer Hyperbel auf der Fläche $ewzh$ bewegt, es sei denn, dass dieser Tag einer der beiden Tage ist, an denen sich die Sonne in [einem der] beiden Wendepunkte $[n]$ sich befindet. An dem einen von den beiden Tagen fallen die Strahlen gar nicht auf die Erde, und an dem anderen beschreibt der Schatten des Punktes d dadurch, dass er sich über die Ebene $ewzh$ bewegt, ein Stück einer Parabel. Mit den beiden gegenüberliegenden Hyperbeln verhält sich die wie in der vorhergehenden Proposition (Nr. B₂)¹.

Beweis: Wir verfahren mit den beiden Kegeln, dem Strahlenkegel und dem Schattenkegel in derselben Weise wie in der vorhergehenden Proposition. Bei dem einen ist

die Basis der Kreis abg , bei dem anderen aber der Kreis ϑkl . Ebenso zeigen wir, dass, wenn die Sonne sich nicht in einem der beiden Äquinoktial- oder Wendepunkte befindet, der Schatten des Punktes d sich über eine Hyperbel bewegt; denn in diesem Fall schneidet der Horizont jeden der beiden Kreise abg und ϑkl .²⁾ Mit den beiden gegenüberliegenden Hyperbeln verhält sich die Sache wie in der vorhergehenden Proposition (Nr. B₂).

Befindet sich die Sonne in einem der beiden Wendepunkte, so ist es klar, dass, wenn sie sich in dem einen von ihnen befindet, die Strahlen nicht auf den erwähnten Ort fallen und dass, wenn sie sich in dem anderen befindet, sie nicht untergeht.

Wir verlegen für diesen Fall ihren Verlauf in den Kreis abg . Der Meridian schneidet die beiden erwähnten Kegel und geht durch ihre Spitze³⁾; dabei erzeugt er in ihnen zwei Dreiecke, diese beiden Dreiecke seien agd und ϑkl . Sie gehen durch die Achse der beiden Kegel. Der Horizont schneidet die Ebene des Meridians unter einem rechten Winkel; ferner berührt ein Punkt des Kreises abg den Horizont; denn die Sonne geht an diesem Tag nicht unter.

Es ist klar, dass der Punkt, in dem der Kreis abg dem Horizont berührt, einer der beiden Punkte a und g ist; denn die beiden Punkte liegen auf dem Meridian; es sei der Punkt g ; dann wird die Linie gd parallel zu der Fläche $ewzh$, die die Stelle des Horizonts vertritt. Dann schneidet die Fläche $ewzh$ den Kegel mit dem Kreis ϑkl als Basis und erzeugt auf ihr (dem Horizont) eine Parabel; denn der Schnitt zwischen ihm (dem Horizont) und dem Dreieck $d\vartheta k$, d. h. die Linie mn wird parallel zu $ad\vartheta$, die Bahn [des Schattens] von d liegt an diesem Tage auf der Linie dieser Schnitt[-kurve], und das wollen wir beweisen.

B₄) Befindet sich die Sonne nicht in einem der Äquinoktialpunkte, so beschreibt das Ende des Schattens eines Gnomons an jedem Tage auf dem Horizont an allen Orten, bei denen die Polhöhe φ grösser ist als der Unterschied zwischen einem Viertelkreis und der Neigung eines der Wendepunkte ($90-\epsilon$) und kleiner als ein Viertelkreis ist, bei seinem Wandern über die Ebene eine Hyperbel und zwar an allen Tagen, an denen die Neigung $[\delta]$ der Sonne gegen den Äquator kleiner ist als die Differenz zwischen einem Viertelkreis und der Polhöhe [$\delta < 90-\varphi$]. Mit diesem Schnitt verhält es sich so, wie bei der 3. Proposition (Nr. B₂).

An den beiden Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach jener Seite gerichtet ist, nach der sich der Horizont neigt und zwar um den Betrag der Vollendung der Polhöhe zu einem Viertelkreis ($90-\varphi$), so beschreibt er (das Ende des Schattens) bei seiner Wanderung eine Parabel. An den zwei Tagen ferner, an denen die Neigung der Sonne gleich der erwähnten ist, aber nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist, als derjenigen, nach der sich der Horizont neigt, und zwar um mehr als der Unterschied der Polhöhe von einem Viertelkreis ($90-\varphi$) beträgt, geht die Sonne dort nicht auf. An den anderen Tagen wandert er [das Ende des Schattens] auf dem Umfang einer Ellipse. Ihre längste Achse ist die Linie, die die beiden Stellen, auf dem das Ende des Schattens liegt, verbindet und zwar, wenn sich die Sonne an diesem Tage auf dem Meridian befindet. Ihr Mittelpunkt ist die Mitte dieser Linie.

Es sei die Bahn der Sonne an irgend einem Tage ausser dem der Äquinoktien der Kreis abg , parallel zum Äquator; das Ende des Gnomon sei d und der Horizont $ewzh$.

Ich behaupte: Der Schatten des Punktes d verhält sich so, wie wir in der Proposition oben ausgeführt haben.

Beweis. Wir zeichnen die beiden Kegel, von denen der eine der Strahlen- der andere der Schattenkegel ist; es sind Kegel, von denen der eine den Kreis abg , der andere den Kreis kl zur Basis hat, ihre Spitzen sind der Punkt d .

Falls die Neigung der Sonne gegen den Äquator kleiner ist, als der Unterschied zwischen einem Viertelkreis und der Polhöhe ($90-\varphi$), so geht die Sonne auf und unter und der Horizont, nämlich $ewzh$, schneidet die beiden Kreise abg

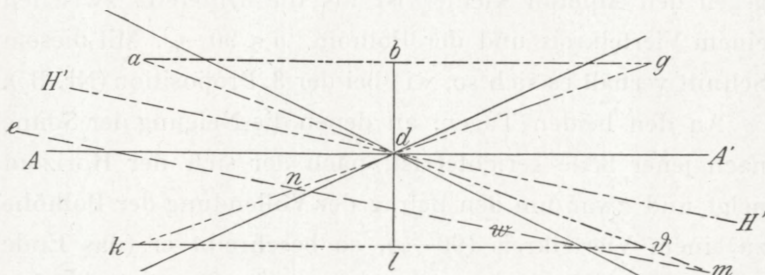


Fig. 5.

und kl . Nach dem, was wir in der früheren Proposition (Nr. B₂) auseinandergesetzt haben, ist klar, dass der Punkt für die beiden Flächen der beiden Kegel, deren Spitze der Punkt d ist, zwei gegenüberliegende Hyperbeln auf dem Horizont erzeugt; über sie geht das Ende des Schattens hin. Sie entstehen entsprechend dem früheren.

An den beiden Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach derselben Seite hin liegt, nach der sich der Horizont neigt, und gleich ist der Differenz der Polhöhe von einem Viertelskreis ($90-\varphi$), geht die Sonne nicht unter. Lassen wir sie sich auf dem Kreis abg bewegen, so berührt abg den Horizont $ewzh$ in einem Punkt. Hieraus ergibt sich klar, wie aus der vorhergehenden Proposition (Nr. B₃), dass der Schatten des Punktes auf der Ebene $ewzh$ auf einer Parabel sich bewegt.

An den beiden Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach der entgegengesetzten Seite, wie der Horizont liegt, und zwar um ebensoviel, als die Differenz der Polhöhe von einem Viertelkreis $[90-\varphi]$ beträgt, fallen offenbar keine Strahlen auf die Erde und kein Gegenstand entwirft einen Schatten.

An den Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach der Seite liegt, die derjenigen entgegengesetzt ist, nach der der Horizont sich neigt und zwar um einen die Differenz der Polhöhe von einem Viertelkreis $(90-\varphi)$ übersteigenden Betrag, verhält sich die Sache so, dass die Sonne dort nicht aufgeht.

An den anderen Tagen, nämlich denjenigen, an denen die Neigung der Sonne nach der Seite zu liegt, nach der der Horizont sich neigt, und grösser ist als der Unterschied zwischen einem Viertelkreis und der Polhöhe $[90-\varphi]$, beschreibt der Schatten des Punktes d , dadurch, dass er über die Ebene $ewzh$ gleitet, eine Ellipse. Dies rührt daher, dass die Sonne an diesen Tagen nicht untergeht und der Horizont den Kreis abg weder schneidet noch berührt; daher fällt der Schatten des Punktes d zu allen Zeiten des Tages auf die Ebene $ewzh$. Alle Seiten des Schattenkegels mit der Basis $\mathcal{J}kl$ werden geschnitten; seine Spitze ist der Punkt d . Dann entsteht aber auf ihr [der Ebene $ewzh$] eine Ellipse.

Zeichnen wir das Dreieck, das von diesem Kegel auf dem Meridiankreis entsteht, nämlich das Dreieck $\mathcal{J}dk$, es ist das Dreieck, das durch die Achse des Kegels geht, [so ist sein Schnittpunkt mit der Ebene $ewzh$] der längste Pfeil (die grosse Achse) jener Ellipse; denn es [das Dreieck] steht senkrecht auf der Ebene $ewzh$. Ist die Schnittlinie des Dreiecks mit der Ellipse die Linie mn , so ist mn die grosse Achse; ihre beiden [End-]Punkte liegen an diesem Tage auf dem Meridiankreis. Der Halbierungspunkt dieser Linie ist der Mittelpunkt der Ellipse; das wollten wir beweisen.

Bemerkungen.

ad A) Wenn die Sonne in den Äquinoktialpunkten steht, sich an diesem Tage also auf dem Himmelsäquator bewegt, degeneriert der Doppelkegel zu einer Ebene, die diejenige des Horizonts in einer Geraden schneidet.

1) TÂBIT denkt wohl vor allem an die nicht genau in der Äquatorebene sich vollziehende Bewegung, dann aber vielleicht an die Abweichungen, die sich ergeben, da die Äquatorebene durch die Gnomonspitze, die Horizontebene durch den Mittelpunkt gelegt gedacht ist usw.

2) TÂBIT würde sich genauer ausdrücken, wenn er sagte, leuchtender Punkt, beleuchteter Punkt und Schatten dieses Punktes liegen in einer geraden Linie.

ad B₁) Für den Nord- und Südpol der Erdkugel fallen die Ebenen des Himmelsäquators und des Horizonts zusammen, bezw. sind sie zueinander parallel. Steht die Sonne in den Äquinoktialpunkten, so verweilt sie während ihres Umlaufs an diesen beiden Tagen im Horizont. Die Schatten eines Gegenstandes sind unendlich lang, da die Strahlen parallel zum Horizont verlaufen. Am Nordpol erhebt sich die Sonne über den Horizont, wenn sie in den nördlichen Tierkreiszeichen steht, am Südpol, wenn sie in den südlichen Zeichen sich befindet. In diesen Fällen fällt der Schatten eines Gegenstandes auf den Horizont. Da an den beiden Erdpolen die Horizontebene parallel zu der Ebene des Äquators und zu der Basis des zum Äquator senkrechten Schattenkegels ist, ist der Schnitt der ersten Ebene mit ihm ein Kreis, dessen Mittelpunkt in die Kegelachse, die Weltachse, fällt. Da sie hier mit dem Lot zusammenfällt, liegt der Mittelpunkt des Schattenkreises im Fusspunkt des Lotes von der Gnomonspitze auf den Horizont (Fig. 2).

1) Auf die klare Schilderung der kinetischen Erzeugung des Kegels sei besonders hingewiesen.

ad B₂) Dieser Abschnitt ist auffallend kurz. TÂBIT erwähnt nicht, dass es sich hier eigentlich um den Fall handelt, bei dem das Komplement der Polhöhe ($90 - \varphi$) grösser als die Ekliptischiefe (ε) ist. Er gibt auch keinen eigentlichen Beweis. Da $\sphericalangle de'w = 90 - \varphi > \sphericalangle A'd\vartheta$ und $< \sphericalangle A'dk$ (Fig. 3), kann man durch d zu ew eine Parallele legen, die innerhalb des Achsendreiecks verläuft. Die durch diese senkrecht zur Meridianebene gelegte Ebene schneidet den Doppelkegel in zwei Erzeugenden. Die Horizontebene ist also zu zwei Erzeugenden parallel und schneidet demnach den Schattenkegel $dk\vartheta$ in einer Hyperbel (Hyperbelast). Ist die Deklination der Sonne kleiner als ε , so bleibt erst recht die obige Beziehung gelten. In der Fig. ist $a'g$ die zur Meridianebene senkrechte Projektion des Tagbogens, wenn die Sonne im Anfang des Krebses steht, also für ihre grösste nördliche Deklination, und $k'\vartheta$ die des Tagbogens, wenn die Sonne im Anfang des Steinbocks steht, wenn sie also ihre grösste südliche Deklination hat. In g befindet sich die Sonne bei der Kulmination, wenn sie im Anfang des Krebses steht. Der Schatten von d fällt auf den Punkt s im Horizont. Da die Sonne auf ihrem Tagbogen zu g symmetrische Stellungen einnimmt, muss der Schatten von d auf der zum Achsenschnitt senkrechten Horizontalebene symmetrische Lagen zu s zeigen, d. h. s ist der Scheitelpunkt der Hyperbel. Steht die Sonne im Anfang des Steinbocks, so ist agd der Schattenkegel, der nach obigen von der Horizontalebene in dem zweiten Ast der oben erwähnten Hyperbel geschnitten wird; n ist der Scheitel dieses Astes, Der Halbierungspunkt der Strecke ns ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Die beiden Äste nennt TÂBIT einander gegenüberliegend. Bezüglich der Lage der beiden Hyperbeläste ist zu vergleichen, das Bild einer horizontalen

Sonnenuhr in C. A. NALLINO, AL BATTÂNÎ, opus astronomicum, I, 137, Mailand 1903 und insbesondere die Abbildungen in der ausführlichen Behandlung der verschiedenen Sonnenuhren von F. COMMANDINUS, die er der lateinisch übersetzten Schrift von PTOLEMAEUS »de Analemmate« anfügt, in der PTOLEMAEUS die auf Orthogonalprojektion beruhende graphische Konstruktion der für die Verfertigung einer Sonnenuhr nötigen Grössen behandelt, (CL. PTOLEMAEI, liber de analemmate etc, Rom 1562.).

ad B₃) Wenn das Komplement der Polhöhe gleich der Ekliptikschiefe ist, so berührt der Horizont wie die Ekliptik den Wendekreis des Krebses und den des Steinbocks und der eine von ihnen verläuft ganz unterhalb des Horizonts d. h. die Sonne geht, wenn sie in diesem Zeichen steht, garnicht auf. An diesem Ort ist die Horizontebene parallel einer Erzeugenden des Kegels $dk\vartheta$ (Fig. 4). Ihr Schnitt mit ihm ist daher eine Parabel. n ist der Schatten von d , wenn die Sonne, wie in der Fig. 4, im Anfang des Krebses stehend kulminiert, (s. Anm. B₂) und der Scheitel der Parabel. Ist die Deklination δ der Sonne kleiner als ε , so ist $90 - \varphi > \delta$; es liegt dann der Fall B₂ vor, wo $\delta = \varepsilon$ ist. Es entstehen dann als Schattenfiguren immer Hyperbeln, ausgenommen natürlich den Fall $\delta = 0$, wo der Schatten eine gerade Linie durchläuft. Der Schatten beschreibt also an diesem Ort im Laufe des Jahres, angefangen vom Steinbock (seinen Anfang ausgeschlossen) bis zum Anfang des Krebses Hyperbeln, eine gerade Linie, Hyperbeln, die ersteren Hyperbeln gegenüberliegen, eine Parabel.

1) Wie in vielen anderen Fällen der arabischen mathematischen Literatur wird auch hier das, was vorher unabhängig von der Fig. dargelegt wird, noch einmal unter deren Zugrundlegung behandelt, Es hängt dies wohl damit

zusammen, dass den damaligen Gelehrten das Verständnis mancher Probleme noch grosse Schwierigkeiten machte und ihre zeichnerischen Darstellungen unübersichtlich waren.

2) TĀBIT drückt sich hier etwas ungenau aus; er müsste sagen, wenn die zum Horizont parallele Ebene durch d die beiden Grundflächen schneidet; denn es ist kaum anzunehmen, dass er unter Kreis abg bzw. ϑkl die durch sie gelegte Ebene versteht. Und wenn dem so wäre, so müsste er doch nochmals betonen, dass d nicht in der Horizontebene liegt.

3) Hier führt TĀBIT auch den Meridianschnitt ein. In der Handschrift sind die Buchstaben b und g mit einander vertauscht; in der Übersetzung ist der Gleichmässigkeit wegen ein für allemal die gleiche Reihenfolge beibehalten.

ad B_4) Hier wird der Fall betrachtet; dass das Komplement der Polhöhe kleiner als die Ekliptikschiefe ist also $90 - \varphi < \varepsilon$, φ muss kleiner wie 90° sein; denn wenn $\varphi = 90^\circ$ wird, liegt der Fall B_1 vor. Im Laufe des Jahres wird die Deklination δ der Sonne gleich $90 - \varphi$ werden. Wir haben den gleichen Fall, wie in B_3 , wo δ den speziellen Wert ε hat. Da die Sonne diesen Wert δ zweimal im Jahre erreicht, so wird die Schattenkurve an diesen beiden Tagen eine Parabel beschreiben. In B_1 sahen wir auch, dass die Sonne mit einem südlichen Äquatorabstand $= \varepsilon$ für nördliche Orte garnicht aufgeht. So wird auch in diesem Fall die Sonne mit dem südlichen Äquatorabstand von dem Betrag $= \delta$ an diesen speziellen Orten nicht mehr aufgehen, natürlich auch nicht, wenn sie einen noch grösseren südlichen Abstand hat. An Orten mit südlicher Breite liegen die Verhältnisse umgekehrt. Ist für Orte mit nördlicher Breite die nördliche Deklination δ kleiner als $90 - \varphi$, so

liegt der Fall B_2 vor, wo δ den speziellen Wert ϵ hat. Die Schattenkurven werden also Hyperbeln; ist aber δ grösser als $90 - \varphi$, so wird die Sonne an Orten mit nördlicher Breite zirkumpolar. a und g (Fig. 5) seien die Orte der unteren und oberen Kulmination, m und n der Schatten von d für diese Lage der Sonne. Da die Neigung des Horizonts gegen die Basis des Schattenkegels $\mathcal{J}dk$ kleiner ist als der Basiswinkel der einzelnen Mantellinien, so schneidet der Horizont sie alle. Sein Schnitt mit dem Schattenkegel ist daher eine Ellipse. Der Schatten beschreibt also in diesen Fällen eine Ellipse. Ähnlich wie in B_2 lässt sich ohne mathematische Betrachtungen wie z. B. in der darstellenden Geometrie zeigen, dass nm eine Achse der Ellipse ist. Da die schneidende Horizontebene senkrecht zum Achsendreieck $dk\mathcal{J}$ des Schattenkegels ist, steht die andere Achse senkrecht zur Ebene des Dreiecks $dk\mathcal{J}$. Wie sich aus der bekannten zeichnerischen Konstruktion der Schnittellipse ergibt, ist diese Achse kleiner als der Durchmesser des Schnittkreises, in dem die Ebene, die durch den Halbpunkt von nm senkrecht zum Achsendreieck gelegt wird, den Kegel schneidet; dieser Durchmesser ist aber die senkrechte Projektion der im Achsenschnitt gelegenen Achse nm . Also ist diese grösser als die andere Achse. Dass der Schatten eine geschlossene, im Endlichen liegende, Kurve sein muss, ergibt sich schon daraus, dass die Sonne in diesen Stellungen des Tierkreises den Horizont garnicht erreicht; daher entwirft der Gnomon keinen unendlich langen Schatten.

Betrachten wir die verschiedenen Schattenkurven im Laufe des Jahres, beginnend mit der Stellung der Sonne in dem südlichen Tierkreiszeichen, das sich gerade über den Horizont erheben kann, so erhalten wir zuerst Hyperbeln,

dann eine Gerade, wieder Hyperbeln (zu den eben genannten gegenüberliegende), dann eine Parabel und schliesslich Ellipsen und dann bei Abnahme der Deklination diese Schattenkurven in umgekehrter Reihenfolge.

Aus dem vorhergehenden ist ersichtlich, dass Fall B_4 der allgemeine Fall ist, während B_2 und B_3 nur Spezialfälle sind, wenn die Deklination δ der Sonne gleich ε ist.

Die Schattenkurven für die Orte am Erdäquator betrachtet TÂBIT nicht. Es ist dies auch garnicht nötig, da dieser Fall unter B_2 fällt. Denn die Polhöhe ist $= 0^\circ$, also $90 - \varphi > \varepsilon$. Wir erhalten als Schattenkurven gegeneinander liegende Hyperbeln. Die geradlinige Schattenkurve geht an diesen Orten durch den Fusspunkt des Gnomons.

Schluss.

Aus der Zusammenfassung des Vorstehenden ergibt sich, dass TÂBIT in ausserordentlich gründlicher und, soweit es ohne besondere mathematischen Hilfsmittel¹ möglich war, auch in erschöpfender Weise, die sich gestellte Aufgabe gelöst hat. Er hat die mannigfaltigen Kurven, die sich der Beobachtung des Schattenverlaufs ergeben und die bei den Sonnenuhren eine grosse Rolle spielen, in vollkommener Weise gedeutet. Dabei war es nicht seine Absicht, für jeden einzelnen Ort der Erdoberfläche die Gestalt der einzelnen auftretenden Kegelschnitte zu untersuchen. Es genügte ihm zu bestimmen, wie die Natur dieser Kurven durch die Polhöhe des Beobachtungsortes und die Deklination der Sonne

¹ Die mathematische Behandlung der verschiedenen Sonnenuhren seitens der Araber gibt C. SCHOY besonders im Anschluss an die hâkimitischen Tafeln des JBN JÛNUS und AL MARRÂKUSCHÎ in einem Band der »Geschichte der Zeitmessung und der Uhren« von E. VON BASSERMANN-JORDAN. Dort findet sich auch eine moderne Bearbeitung der ganzen Theorie der Sonnenuhren.

gegeben ist. Dem Stand der damaligen Wissenschaft entsprechend wird aber nicht der bei uns allgemein übliche Weg eingeschlagen, formal den allgemeinsten Fall zunächst zu behandeln, das Ergebnis in eine mathematische Formel zu fassen und daraus deduktiv die einzelnen Fälle abzuleiten, sondern es werden zunächst die typischen Einzelfälle untersucht und dann wird zum Schluss, sei es bewusst oder unbewusst, der allgemeinste Fall behandelt. Es ist dieses der Weg, der auch jetzt noch bei neu entstehenden Wissensgebieten immer und immer wieder eingehalten wird. Es sei noch erwähnt, dass TÂBIT bei seinen Betrachtungen stillschweigend die Sonne punktförmig annimmt. TÂBITS Arbeit reiht sich würdig den anderen Schriften aus der ersten Zeit muslimischer Tätigkeit auf dem Gebiete der Naturwissenschaften an.

In den obigen Ausführungen haben wir uns bemüht, einen kleinen Beitrag zu einem Wissensgebiet zu liefern, auf dem so hervorragende dänische Philologen und Mathematiker wie Professor HEIBERG und der leider verstorbene Professor ZEUTHEN unsere Kenntnisse nach den verschiedensten Richtungen hin in ungewöhnlichem Masse bereichert haben.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKESSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7 RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse »NH ₂ COONH ₄ + H ₂ O ⇌ (NH ₄) ₂ CO ₃ « und »CO ₂ + H ₂ O ⇌ H ₂ CO ₃ «. 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922.....	0.60
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922.....	0.70
6. PRYTZ, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922 ..	0.75
7. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922	2.15
8. BØGGILD, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). (Under Pressen).....	
9. WIEDEMANN, E. und FRANK, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922	0.75
10. PEDERSEN, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. (Under Pressen)	

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 10.

OM ELEKTRISKE GNISTER

I. GNISTFORSINKELSE

AF

P. O. PEDERSEN

MED 2 TAVLER



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Pris: Kr. 3,25.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Son*
Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 10.

OM ELEKTRISKE GNISTER

I. GNISTFORSINKELSE

AF

P. O. PEDERSEN

MED 2 TAVLER



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

1. Indledning.¹

Den elektriske Gnist hører til de længst kendte og mest undersøgte elektriske Fænomener. Allerede OTTO v. GUERICKE iagttog omkring 1663 elektriske Gnister ved sine Forsøg med Svovlkugleelektrisermaskinen. BENJAMIN FRANKLIN paaviste 1749, at Lynet er en elektrisk Gnist og skabte derigennem en stærk forøget Interesse for Studiet af Gnistfænomenet. I Aaret 1777 iagttog CHR. LICHTENBERG de med Gnisten nærbeslægtede Udladninger, der senere kom til at bære hans Navn. HENRY CAVENDISH² dannede sig (omkring 1771) følgende Billede af den elektriske Gnists Dannelse: Elektriciteten (det elektriske Fluidum) vil til at begynde med flyde i en ganske svag Strøm fra den ene Elektrode til den anden og derved lade Luftpartiklerne. Disse vil derfor frastøde hinanden, hvorved Luftens Tæthed bliver mindre, Strømmen af Elektricitet følgelig stærkere. Dette bevirker atter en stærkere Ladning af Luftpartiklerne med tilsvarende stærkere gensidig Frastødning og yderligere formindsket Tæthed. Denne Proces forløber videre, indtil der dannes et Vakuum, hvorigennem Gnisten da slaar over.

Ogsaa FARADAY³ har beskæftiget sig indgaaende med

¹ Et ganske kort, foreløbigt Referat af disse Undersøgelser findes i Fysisk Tidsskrift. 19de Aargang, p. 52—54, Nov. 1920.

² J. C. MAXWELL: The Electrical Researches of Henry Cavendish. Se særlig Articles No. 135—139 og 212. (Cambridge 1879).

³ M. FARADAY: Experimental Researches in Electricity. Vol. I, No. 1406 o. fig. 1839.

Gnistfænomenet og ydet værdifulde Bidrag til dets Belysning. Af Interesse er blandt andet FARADAY'S Anskuelse om Gnistens Dannelse. Han forestillede sig, at der forud for Gennemslaget fandt en Fordeling Sted i Luftmolekulerne, og naar denne havde naaet en bestemt Værdi, skete Udladningen fra Molekul til Molekul, saaledes som antydet i Fig. 1.

Det vil iøvrigt føre alt for vidt at komme ind paa Omtalen af blot de betydeligste Gnistundersøgelser, der er foretaget siden FARADAY'S Dage.¹ Mange af disse Forsøg er gaaet ud paa at bestemme Gnistspændingen V 's Afhæn-

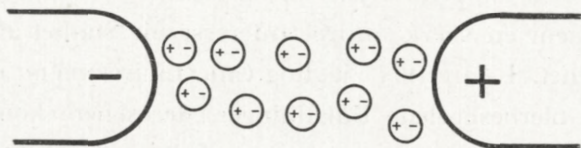


Fig. 1. FARADAY'S Anskuelse over Gnistdannelse.

ghed af Gnistlængden l , af Luftartens Natur, dens Tryk p , dens Temperatur og dens Fugtighedstilstand, af Elektroderne Form, af Luftens Ionisationstilstand og af flere andre Forhold. Ved Gnistspændingen forstaas her den mindste Spændingsforskel mellem Elektroderne, ved hvilken Gnisten under de angivne Forhold kan dannes, naar Spændingen holdes paa tilstrækkelig længe. Af herhen hørende Arbejder skal kun nævnes F. PASCHEN'S² Undersøgelser, der viste, at Gnistspændingen for en given Luftart kun er

¹ Udførlige Litteraturangivelser findes i: J. J. THOMSON: Conduction of Electricity in Gases. (Cambridge 1903);

J. STARK: Die Elektrizität in Gasen. (Leipzig 1902).

J. S. TOWNSEND: Electricity in Gases. (Oxford 1915);

W. KAUFMANN: Müller-Pouillet: Lehrbuch der Physik. IV. (10. Auflage, Braunschweig 1914.)

² F. PASCHEN: Wied. Ann. 37, p. 69—96. 1889.

en Funktion af Produktet af Gnistlængde og Lufttryk, altsaa $V = f(l \cdot p)$.

I Aaret 1887 konstaterede H. HERTZ¹, at Gnistdannelsen lettere foregaar, naar Elektroderne og Gnistrummet udsættes for Bestraaling med ultraviolet Lys; især var Bestraaling af Katoden virksom. E. WIEDEMANN og H. EBERT² paaviste, at det alene er denne, der har Indflydelse. G. JAUMANN³ mente af sine Forsøg at burde slutte, at Gnistdannelsen ikke alene er betinget af Tilstedeværelsen af en vis bestemt Spændingsforskel V mellem Elektroderne, men ogsaa af den Hastighed, $\frac{dV}{dt}$, hvormed denne Spændingsforskel varierer. En noget lignende Opfattelse nærede R. SWYNGEDAuw.⁴ E. WARBURG⁵ paaviste senere, at Virkningen af det ultraviolette Lys ikke beror paa, at Gnistspændingen nedsættes, men derimod skyldes, at Gnistforsinkelsen, τ : den Tid, der hengaar mellem Spændingens Tilstedekomst og Gnistens Dannelse, reduceres eller ganske forsvinder. WARBURG paaviste tillige, at der i hvert enkelt Tilfælde eksisterede en bestemt, konstant Gnistspænding. Det har senere vist sig, at Virkningen af det ultraviolette Lys skyldes den fotoelektriske Effekt, altsaa Frigørelse af Elektroner ved Katoden. I Overensstemmelse hermed har Ionisering ved Hjælp af Røntgen Straaler og ved α , β og γ Straaler en ganske analog Virkning.

¹ H. HERTZ: Wied. Ann. 31, p. 983—1000. 1887.

² E. WIEDEMANN u. H. EBERT: Wied. Ann. 33, p. 241—264. 1888.

³ G. JAUMANN: Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien XCVII. Abth. II a, p. 765—805. 1888; Wied. Ann. 55, p. 656—683. 1895.

⁴ E. BICHAT et R. SWYNGEDAuw: Rapports présentés au congrès international de physique. III, p. 164—182. Paris 1900.

⁵ E. WARBURG: (a) Sitzungsber. d. k. pr. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 223—236, 1896 (I); (b) p. 128—136, 1897 (I); (c) Wied. Ann. 59, 1—16. 1896; (d) 62, p. 385—395. 1897; (e) Verh. Deutsch. Phys. Ges. 2, p. 212—217. 1900.

Den første og hidtil eneste virkelig gennemarbejdede Teori for Gnistdannelsen støtter sig paa Elektronteorien og er i Hovedsagen udarbejdet af J. Stark, J. J. Thomson og især af J. S. TOWNSEND. Efter denne opstaar Gnisten som Følge af en Stødionisation i Gnistrummet, der fremkommer, naar Feltintensiteten er bleven saa stor, at ikke alene Elektronerne, men ogsaa de ved Stødionisationen i Gnistmelletrummet dannede positive Ioner i tilstrækkelig Grad virker ioniserende. TOWNSEND's Teori giver en naturlig Forklaring af PASCHEN's Lov og synes ogsaa paa tvangfri Maade at forklare den forannævnte, af tidligere Forskere gjorte Iagttagelse, nemlig, at fri Ioner i Gnistrummet formindsker Gnistforsinkelsen.

Nærværende Arbejde beskæftiger sig i Hovedsagen kun med den experimentale Undersøgelse af Gnistforsinkelsen, og da denne ogsaa fra anden Side i de senere Aar har været gjort til Genstand for forskellige Undersøgelser og Betragtninger, skal vi ganske kort referere det Standpunkt, hvortil de hidtidige Undersøgelser har ført. Vi vil dog her og i det følgende i Hovedsagen indskrænke os til at betragte Gnistdannelsen mellem Kugler, hvis Afstand er mindre end Kuglernes Diameter, saaledes at Gnistdannelsen foregaar i et i Hovedsagen homogent Felt. Dog vil vi i 9de Afsnit give nogle Oplysninger om Gnistforsinkelsen ved Anvendelse af spidse Elektroder.

Udgangspunktet for alle nyere Undersøgelser og Betragtninger har i Hovedsagen været TOWNSEND's Teori. Det vil derfor være naturligt at begynde med TOWNSEND's egen Fremstilling af dette Forhold, der lyder saaledes:¹

»In order to start a discharge it is necessary that there should be some ions in the gas initially, and when the

¹ J. S. TOWNSEND: Electricity in Gases, p. 338—339. Oxford 1915.

force in the field between the electrodes is raised to a certain point these are multiplied by collision to a sufficient extent to maintain the discharge. In some cases ions are not present in sufficient numbers to start the discharge immediately when the potential difference V is established between the electrodes, but if ultra-violet light falls on the negative electrode, or if the gas is ionized by Röntgen rays or Becquerel rays, this difficulty is removed. Under these conditions it is impossible to raise the potential difference between the electrodes above the value V (= the sparking potential).«

E. WARBURG fastslaar følgende for ioniseret Gnistbane¹: »Der Funke tritt ein, sobald das Potential auf einen gewissen, mit grosser Schärfe bestimmbaren Wert gesteigert ist«

Paa ganske tilsvarende Maade udtaler W. KAUFMANN sig² (S. 991): »Bei bestrahlter Funkenstrecke erfolgt die Entladung, sowie das Funkenpotential gerade erreicht ist«, og S. 1160: »Die Erzeugung der Ionenzahl n aus der anfänglichen Anzahl n_0 nimmt Zeit in Anspruch, und zwar um so mehr, je kleiner n_0 ; deshalb wird die Entladung um so langsamer eintreten, je weniger das Gas anfänglich ionisiert und je weniger das Funkenpotential überschritten war. Dass auch in nicht besonders beeinflusstem Gase stets einige Ionen vorhanden sind, welche zur Einleitung des ganzen Vorganges ausreichen, wurde zuerst von ELSTER und GEITEL nachgewiesen.«

Paa ganske lignende Maade udtaler J. STARK³ og J. J.

¹ E. WARBURG: Verh. Deutsche Phys. Ges. 2, p. 212. 1900.

² Müller-Pouillet: Lehrbuch der Physik. IV, p. 991 og 1160 (Braunschweig 1914).

³ J. STARK: l. c. p. 226.

THOMSON¹ sig. J. A. Crowther udtaler²: »It [the time-lag] is reduced to zero if the negative electrode is exposed to a weak source of ultraviolet light.«

NORMAN CAMPBELL giver i en udførlig Afhandling om: »Time-lag in the Spark Discharge« Udtryk for en ganske tilsvarende Opfattelse.³ Vi kommer senere tilbage til denne betydningsfulde Afhandling.

F. W. PEEK jr.⁴ kommer gennem sine indgaaende Undersøgelser over Coronadannelse og Gnistdannelse til et ganske tilsvarende Resultat.

Alle de foregaaende Udtalelser samstemmer i, at en elektrisk Gnist under gunstige Forhold — 3: naar der findes en Del Ioner i Gnistrummet — kan dannes øjeblikkelig efter, at Gnistspændingen er naaet, saaledes at Gnistforsinkelsen i disse Tilfælde er lig med Nul eller i hvert Fald saa lille, at den er umaalelig. Den Vanskelighed, der opstaar ved at tænke sig, at en længere Gnist dannes i en forsvindende kort Tid, undgaas, naar man benytter sig af FARADAY'S Opfattelse, nemlig, at Gnisten dannes samtidig gennem hele sin Længde. NORMAN CAMPBELL udtrykker dette i den moderne Elektronteoris Sprog saaledes⁵: »... the discharge does not start in one place only in a sphere gap. It starts at a great many places at the same time, and the lag which must occur is only the time required for the ions to travel from one of these places to the other.«

Til trods for denne Enighed er den nævnte Opfattelse, som vi i det følgende skal se, dog urigtig. Til Dannelse

¹ J. J. THOMSEN: l. c. p. 383.

² J. A. CROWTHER: Ions-Electrons. p. 67. 1919.

³ NORMAN CAMPBELL: Phil. Mag. (6) 38, p. 214—230. 1919.

⁴ F. W. PEEK jr.: Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering. 1915.

⁵ NORMAN CAMPBELL: l. c. p. 224.

af en Gnist medgaar, selv under de gunstigste Forhold og selv om den paa virkende Spænding langt overstiger Gnistspændingen, en maalelig Tid, der i hvert enkelt Tilfælde har en ganske bestemt Minimumsværdi, den minimale Forsinkelse τ_{\min} . Værdien af τ_{\min} er uafhængig af Luftens Ionisationstilstand.

Efter TOWNSEND'S Teori maa man vente, at der i de Tilfælde, hvor der er en kendelig Gnistforsinkelse, gaar en indledende eller forberedende Strøm forud for den egentlige Gnistdannelse. En saadan forudgaaende Strøm er dog aldrig med Sikkerhed direkte iagttaget, selv om adskillige Forskere af forskellige Forhold vedrørende Gnistudladningen har ment at maatte slutte, at en saadan Strøm virkelig findes. Dette var saaledes Tilfældet med A. TÖPLER¹ paa Grundlag af hans efter Slørmetoden optagne Gnistbilleder.

G. JAUMANN giver Udtryk for en lidt anden Opfattelse²: »Während dieser Verspätung verläuft ein Vorprocess der Entladung, welcher selbst keine Entladung ist.« E. WARBURG³ har ved lavere Tryk konstateret, at Tilstedeværelsen af et magnetisk Felt i Gnistrummet har Indflydelse paa Gnistspændingen, og han slutter deraf, at der maa findes en saadan indledende Strøm. Uden at gaa ind paa en nærmere Undersøgelse af den dragne Slutnings Berettigelse, skal vi her kun anføre, at man i hvert Fald ikke af WARBURG'S Forsøg kan drage nogen sikker Slutning med Hensyn til Forholdene ved Atmosfæretryk, som vi for nærværende særlig beskæftiger os med.

I de Tilfælde, hvor Gnistlængden er væsentlig større

¹ A. TÖPLER: Pogg. Ann. 134, p. 217. 1868

² G. JAUMANN: Wied. Ann. 55, p. 683. 1895.

³ E. WARBURG: Wied. Ann. 62, p. 389. 1897.

end Elektrodekuglernes Diameter, vil der forud for den egentlige Gnistdannelse som Regel foregaa Buskudladninger fra Elektroderne. Den efterfølgende Gnist følger da tildels de af Buskudladningerne banede Veje. Buskudladningerne kommer paa en Maade til at danne ledende Spidser, mellem hvilke den egentlige Gnistudladning foregaa. Saadanne Forudladninger er fotografisk paavist af B. WALTER.¹ I de Tilfælde, hvor Gnistlængden er mindre end Elektrodekuglernes Diameter, er en saadan forudgaaende Udladning aldrig paavist.

Alt i alt maa det siges, at Spørgsmaalet om, hvorledes Gnistdannelsen indledes, henstaar ganske uløst. De følgende Undersøgelser kaster i nogen Grad Lys over dette Forhold.

Angaaende den Rolle, som Beskaffenheden og Tilstanden af Elektrodernes Overflade spiller for Gnistforsinkelsen, foreligger der kun forholdsvis faa Angivelser. De foran nævnte Bøger af J. J. THOMSON, J. S. TOWNSEND, W. KAUFMANN og J. A. CROWTHER gaar ikke nærmere ind paa Spørgsmaalet. E. WARBURG siger om de af ham benyttede Elektroder kun²: »Die Elektroden sind die blank geputzten Eisenkugeln von 2,6 cm Durchmesser eines in freier Luft aufgestellten Funkenmikrometers.« Og videre samme Sted: »Zu den Verzögerungsversuchen im Dunkeln ist Folgendes zu bemerken. . . . Oft rückt auch das Potential, bei welchem die Entladungen beginnen . . . hinauf oder hinunter. Auf wechselnden atmosphärischen Verhältnissen schien das nicht zu beruhen, ebenfalls nicht auf verschiedener Behandlung der Elektroden, wie Art des Putzens oder dergleichen; auch war eine Corrosion der Elektroden durch die schwachen

¹ B. WALTER: Wied. Ann. 66, p. 636—648. 1898; 68, p. 776-778. 1899. Se ogsaa: M. TÖPLER: Ann. d. Phys. (4) 19, p. 191—209. 1906.

² E. WARBURG: Wied. Ann. 59, p. 6. 1896.

benutzten Funken kaum bemerkbar.« Det bemærkes, at Gnistbanen i de omhandlede Forsøg kun udsattes en ganske kort Tid (omkring 0,001 Sekund) for det omtalte Potential. Det var derfor Gnistforsinkelsens Størrelse, der var afgørende for, om Gnistdannelse fandt Sted. Ogsaa G. JAUMANN, R. SWYNGEDAUF og NORMAN CAMPBELL omtaler Indflydelsen af Overfladens Beskaffenhed, men de Oplysninger, de giver, er meget ufuldstændige og kun delvis rigtige. Af størst Betydning er de af sidstnævnte Forfatter fundne Resultater; vi kommer senere noget nærmere ind paa dette Spørgsmaal.

I et for kort Tid siden offentliggjort Arbejde af J. D. MORGAN¹ om Gnistforsinkelse hedder det (p. 465), at Elektroderne var »polished brass balls of .5 inch diameter«, medens der ingen yderligere Oplysninger findes om Elektrodernes Tilstand.

De følgende Undersøgelser viser, at Overfladens Beskaffenhed udøver en dominerende og meget ejendommelig Indflydelse paa Gnistens Dannelsesetid og Dannelsesmaade.

Blandt de Undersøgelsesmetoder, der hidtil er anvendt, skal vi kun ganske kort omtale nogle enkelte. E. WARBURG'S² Metode gik ud paa i et ganske kort Tidsrum, T_0 , at sætte en til en kendt Spænding ladet Kondensator i Forbindelse med den undersøgte Gnistbane, hvis to Kugler Resten af Tiden var sat til Jord. Forsøgene udførtes saa paa den Maade, at man for en bestemt Spænding, en bestemt Gnistlængde og visse givne Ionisationsforhold 10 Gange satte Spændingen paa, og saa noterede, hvor ofte Gnistdannelse fandt Sted. Da Tidsrummet T_0 ikke kunde

¹ J. D. MORGAN: Phil. Mag. (6) Vol. 41, p. 462—469. 1921.

² E. WARBURG: (a), (c).

bringes væsentlig ned under 0,001 Sekund, fik man ved denne Metode kun Oplysning om Forsinkelser, der har en Varighed af omkring 0,001 Sekund eller endnu mere.

De fleste Maalinger — det gælder saaledes F. W. PEEK jr.'s¹ og NORMAN CAMPBELL's² Undersøgelser — er foretagne paa den Maade, at man bestemmer dels den til Gennemslag lige netop nødvendige Størrelse af Maksimalamplituden V_m af en Vekselspænding af kendt Frekvens og kendt Kurveform, dels den konstante Spænding, V_0 , der lige akkurat er tilstrækkelig til at give Gnist. Forholdet, $\frac{V_m}{V_0}$, kalder F. W. PEEK jr. Impulsforholdet. Jo større dette er, desto langsommere er, alt iøvrigt lige, den paagældende Gnistbane. Er Impulsforholdet nøjagtig lig med 1, saa maa Gnistforsinkelsen være lig med Nul. Af Impulsforholdets Værdi kan man, naar Vekselspændingens Frekvens og Kurveform er kendt, navnlig ved højfrekvent Vekselspænding med nogenlunde Sikkerhed slutte sig til Forsinkelsens Størrelse under de foreliggende Forhold. Metoden har dog en meget betydelig Mangel. Naar Vekselspændingens Amplitude mer eller mindre langsomt bringes op til Gennemslagsværdien, saa vil Gnistbanen forud for Gennemslaget gennem en hel Række Perioder være udsat for vekslende Spændinger, der paa det nærmeste er lig med V_m . Hvilken Indflydelse dette har paa Forholdene umiddelbart forud for Gnistens Dannelse, lader sig vanskelig forudse.

J. D. MORGAN gaar i det foran nævnte Arbejde ud fra, at den sekundære Spænding i en Induktionsrulle kan betragtes som værende ren sinusformet med en Maksimalamplitude, der er proportional med Primærstrømmens Styrke. Hans Forsøg gaar ud paa at bestemme den maksi-

¹ F. W. PEEK jr.: l. c.

² NORMAN CAMPBELL: l. c.

male Spænding, der, for forskellige Værdier af Primærstrømmen, opstaar mellem Elektroderne i den undersøgte Gnistbane, som er indskudt i Induktionsrullens sekundære Vikling. Man kan derefter, under de gjorte Forudsætninger, slutte sig til Forsinkelsens Størrelse. Metoden frembyder visse Fordele, men den lider, i hvert Fald i den foreliggende Anvendelsesmaade, delvis af de samme Mangler som de ovenfor nævnte.

Ingen af de omtalte Metoder egner sig derfor til at besvare følgende Spørgsmaal: En Gnistbane udsættes pludselig for Spændingen V' , der er større end eller lig med Gnistspændingen; hvor lang Tid hengaar da, førend Gnisten dannes, naar V' opretholdes uforandret?

Der er næppe Tvivl om, at det er dette Spørgsmaal, som det i fysisk Henseende har den største Interesse at faa besvaret. Ogsaa i teknisk Henseende, f. Eks. med Hensyn til Overspændingssikring, har netop dette Spørgsmaals Besvarelse en betydelig Interesse.

Forfatteren har tidligere angivet en Metode til ved Hjælp af de LICHTENBERG'ske Figurers store Udbredeshastighed at bestemme Tidsforskellen mellem to paa hinanden følgende Spændingsstød¹, selv om denne Tidsforskel ikke overstiger 10^{-9} Sekund. Ved Hjælp af denne Metode er man nu i Stand til direkte at løse den ovenfor formulerede Opgave.

Denne Omstændighed i Forbindelse med, at et vist Kendskab til Forholdene ved de elektriske Gnisters Start ogsaa er nødvendigt for Klarlæggelsen af Spørgsmaalet om

¹ P. O. PEDERSEN: On the Lichtenberg Figures. Part I. Vidensk. Selsk. Math.-fysiske Medd. I, 11. Copenhagen 1919. Part II. IV, 7. 1922. Betegnes i det følgende: L. F. I og L. F. II.

de LICHTENBERG'ske Figurers Dannelsesmaade, bragte Forfatteren ind paa den foreliggende Undersøgelse.

Denne falder iøvrigt i to Dele, nemlig dels i den i det følgende givne Redegørelse for de anstillede Forsøg, dels i et senere Arbejde over den elektriske Gnists Dannelse.

2. Den anvendte Maalemetode.

Med Hensyn til den ved Maalingen af Gnistforsinkelserne anvendte Metode kan vi henvise til en tidligere Afhandling¹ og skal kun for Fuldstændigheds Skyld tilføje,

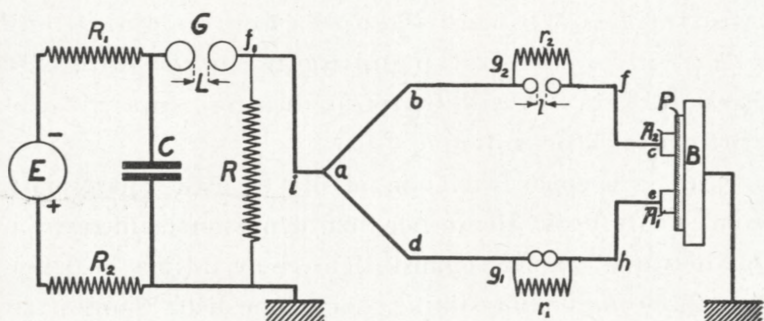


Fig. 2. Forsøgsopstilling til Bestemmelse af Gnistforsinkelse.

G Primær- eller Hovedgnistbane, g_2 den undersøgte Gnistbane. Gnistlængderne i disse betegnes ved henholdsvis L og l .

hvad der er nødvendigt for Forstaaelsen af den i Fig. 2 skitserede Forsøgsopstilling. Elektrisermaskinen E , hvis positive Pol i Almindelighed er sat til Jord, oplader over de meget store Modstande R_1 og R_2 (Skifergrifler) Kondensatoren C (Kapacitet omkring 2000 cm). Naar dennes Spænding, V , har naaet den til Gennemslag af Primær- eller Hovedgnistbanen G (Gnistlængde L mm) nødvendige Værdi, slaar en Gnist over i G , og en elektromagnetisk Bølge vandrer ud ad Ledningen f_1ia . I Punktet a vil denne Bølge bevirke, at der fra dette Punkt udgaar dels

¹ L. F. II.

en reflekteret Bølge langs aif_1G , dels to lige stærke, transmitterede Bølger, der vandrer ud ad henholdsvis abg_2 og adg_1 . Gaar vi ud fra, at Karakteristikkerne af Ledningerne ai , ab og ad er lige store, saa vil Amplituderne af den reflekterede og de transmitterede Bølger være givne ved henholdsvis

$$V_r = -\frac{1}{3}V \quad \text{og} \quad V_t = \frac{2}{3}V, \quad (1)$$

hvor V er Spændingsamplituden i den oprindelige Bølge,

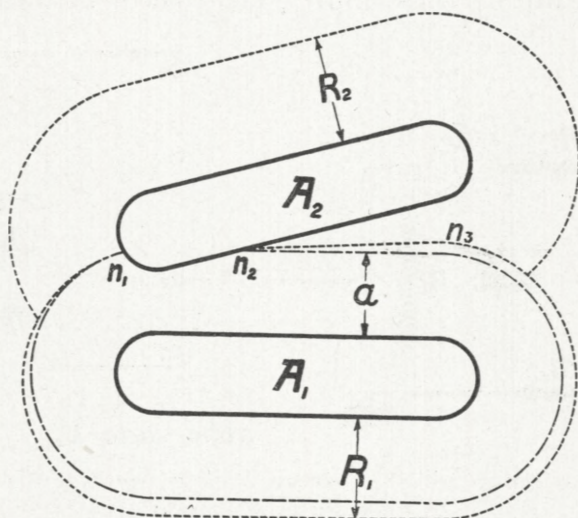


Fig. 3. Form og Placering af Elektroderne A_1 og A_2 .

V_r i den reflekterede og V_t i de langs ab og ad vandrende Bølger.

Naar den ud langs ab vandrende Bølge træffer Gnistbanen g_2 , vil der, saa længe der endnu ikke er dannet en Gnist i g_2 , i dette Punkt ske en fuldstændig Reflektion af den ankommende Bølge. Gnistbanen g_2 vil derfor, indtil Gnistdannelsen finder Sted, være udsat for Spændingen V_0 bestemt ved

$$V_0 = 2V_t = \frac{4}{3}V. \quad (2)$$

Rigtigheden af de anstillede Betragtninger bekræftes bl. a. derved, at den største Værdi af L_2 , for hvilken man endnu lige akkurat kan opnaa en Gnist i g_2 , paa det nærmeste er lig med $1,3 L$. (Gnistmikrometret g_1 forudsættes at være kortsluttet.)

Saa snart Gnisten i g_2 er dannet, vandrer der en Bølge fra g_2 over f og c til Elektroden A_2 . I Mellemtiden er, idet vi foreløbig gaar ud fra, at Gnistbanen g_1 er kortsluttet, den ud langs adg_1he vandrende Bølge allerede tid-

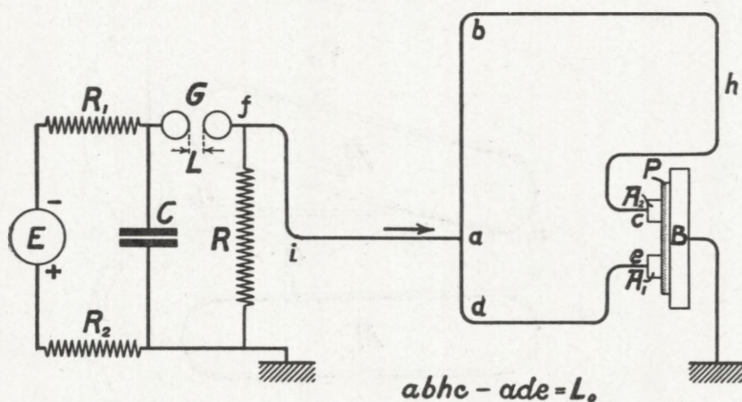


Fig. 4. Opstilling til Bestemmelse af sammenhørende Værdier af Forsinkelsen t_0 og Længden a .

ligere naaet til Elektroden A_1 . De nævnte Elektroder, A_1 og A_2 , er anbragte paa Hindesiden af en fotografisk Plade, P , der hviler paa den jordforbundne Metalplade B . Gennem Anbringelsen af de viste, meget store Modstande R , r_1 og r_2 (Skifergrifler) er der sørget for, at hele det omhandlede Ledningssystem fra f til A_1 og A_2 før Gnistudladningen har Jordens Potential.

Naar de elektromagnetiske Bølger har naaet Elektroderne, vil der ud fra disse paa Hinden af P brede sig LICHTENBERG'ske Figurer. Da den langs adg_1he gaaende

Bølge naar Elektroden A_1 , førend Bølgen langs abg_2fc naar A_2 , vil den fra A_1 udgaaende Figur faa et Forspring i Tid, t_0 , der er lig med Tidsforskellen mellem Bølgernes Ankomst til henholdsvis A_1 og A_2 . Den fra A_1 udgaaende Figur har derfor bredt sig ud til en Afstand a fra Elektroden (se Fig. 3), førend Figurdannelsen ud fra Elektroden A_2 begynder. I Mellemrummet mellem de to Elektroder vil Skillelinien mellem de fra disse udgaaende Figurer i Hoved-

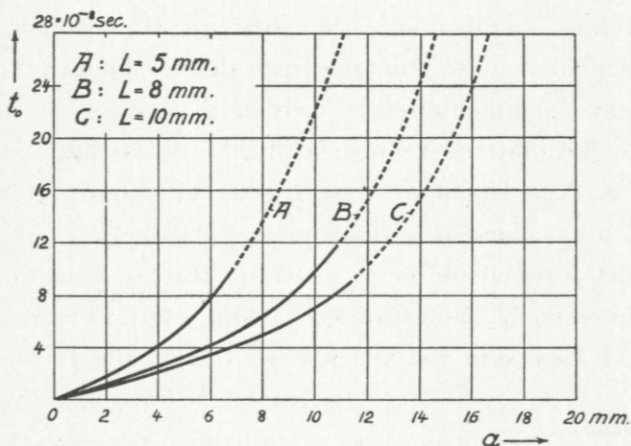


Fig. 5. (a, t_0)-Kurver gældende for negative Figurer ved Atmosfæretryk. De fuldt optrukne Dele af Kurverne A, B og C er bestemt paa Grundlag af den i Fig. 4 angivne Metode. De punkterede Dele er skønnede som gældende for den i Fig. 2 viste Opstilling.

sagen forløbe retlinet, og Længden a er lig med Afstanden fra den retlinede Skillelinies Skæringspunkt med Randen af A_2 til Randen af A_1 . Med Hensyn til de nærmere Enkelt-heder ved Maalingen henvises til L. F. II.

Man kan paa denne Maade bestemme den til en vis Gnistforsinkelse svarende Værdi af a . Selve den Forsinkelse, t_0 , maalt i Tid, der svarer hertil, kan da bestemmes ved Hjælp af den i Fig. 4 viste Opstilling. Forsinkelsen t_0 til-

vejebringes her ved, at de fra Punktet a i Fig. 4 udgaende Bølger, førend de naar Elektroderne A_1 og A_2 , gennemløber ulige lange Traadlængder, idet Traaden abh_c er L_0 m længere end Traaden ade . Man har følgelig, at Tidsforskellen t_0 mellem de to Bølgers Ankomst til henholdsvis A_1 og A_2 er bestemt ved:

$$t_0 = \frac{L_0}{3 \times 10^8} \text{ Sekunder.} \quad (3)$$

Paa Pladen P maales da, som angivet ovenfor, den tilsvarende Værdi a . For en bestemt Gnistlængde, L , i Hovedgnistbanen, G , kan man paa denne Maade bestemme en Række sammenhørende Værdier af t_0 og a og derefter afsætte Resultaterne i Form af Kurver, saaledes som vist i Fig. 5. Ved Hjælp af disse Kurver kan man for enhver Værdi af a aflæse den tilsvarende Forsinkelse t_0 .

I det foregaaende er vi gaaet ud fra, at Bølgefronterne er ganske stejle. Bølgefronten vil dog altid være noget afladet, f. Eks. som vist ved Kurven $obcf$ i Fig. 6. Man kan

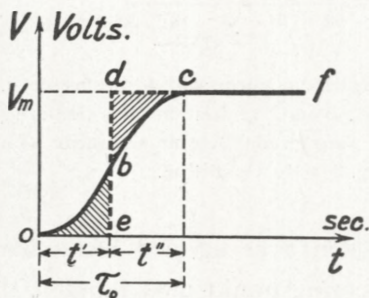


Fig. 6. Den med obc »ækvivalente, stejle« Bølgefront er ebd .
Arealet $obe = \text{Arealet } bdc$.

da tænke sig denne Front erstattet med den »ækvivalente, stejle« Front ebd , og den maalte Værdi af t_0 vil i saa Fald svare til Tidsforskellen mellem Ankomsten til henholdsvis A_1 og A_2 af disse ækvivalente Bølgefronter.

Ved den i Fig. 2 viste Opstilling er der lagt Vægt paa at gøre denne saa vidt muligt

symmetrisk, saaledes at Bølgerne ankommer nøjagtig samtidig til A_1 og A_2 , naar Gnistmikrometrene g_1 og g_2 begge er kortsluttede. Denne Symmetri konstateres simpelthen

ved at anbringe A_1 og A_2 i ringe Afstand fra hinanden; falder Skillelinien da nøjagtig i Midten, er der Symmetri, i modsat Fald ikke.

For Forsinkelser op til omkring $8 \text{ à } 10 \times 10^{-8}$ Sekunder giver den i Fig. 2 skitserede Opstilling paalidelige Resultater. For større Forsinkelser vil man staa sig ved at an-

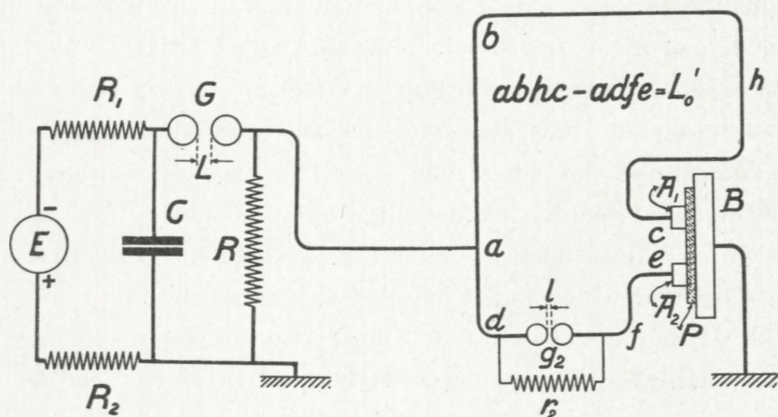


Fig. 7. Opstilling, i hvilken en Del af Forsinkelsen i g_2 kompenseres ved den ekstra Traadlængde L'_0 m mellem a og A_1 .

vende den i Fig. 7 skitserede Fremgangsmaade, hvor man delvis kompenserer Forsinkelser i Gnistbanen g_2 ved at lade Bølgen til A_1 passere en Traadlængde, der er L'_0 m længere end Traaden fra Punktet a over g_2 til A_2 . Er den paa Grundlag af Billedet paa Pladen P bestemte Forsinkelse t'_0 , saa vil den virkelige Forsinkelse t_0 være givet ved

$$t_0 = t'_0 + \frac{L'_0}{3 \times 10^8}. \quad (4)$$

Grunden til, at man ikke med tilstrækkelig Nøjagtighed direkte paa Pladen P kan bestemme Forsinkelser paa over $8 \text{ à } 10 \times 10^{-8}$ Sekund, ligger i, at de LICHTENBERG'ske Figurer allerede efter Forløbet af nævnte Tidsrum har bredt sig saa nær ud til deres endelige Begrænsning, at en Bestem-

melse af Tiden ved Hjælp af den gennemløbne Vej bliver meget usikker. Det samme ses ved en Betragtning af Kurverne i Fig. 5 i nærværende Afhandling og Fig. 4 og 6 i L. F. II.

Ved store Forsinkelser indtræder der desuden ved den i Fig. 2 viste Opstilling den Komplikation, at den fra g_2 reflekterede Bølge over $badg_1he$ naar hen til Elektroden A_1 , før den gennem g_2 gaaende Bølge har naaet Elektroden A_2 . Denne ekstra Spændingsforhøjelse vil for de negative Figurers Vedkommende bevirke, at Udbredelseshastigheden bliver ekstraordinær stor yderst ude, og at de tilsvarende Figurer derfor ogsaa faar en ekstraordinær Rækkevidde. Man kan derfor ved Benyttelse af den i Fig. 2 viste Opstilling hverken bestemme de store Forsinkelser paa Grundlag af de i L. F. II fundne Love for de simple LICHTENBERG-Figurers Udbredelseshastighed, eller ved Hjælp af (a, t_0) -Kurver, der er optaget paa den i Fig. 4 angivne Maade. De punkterede Dele af Kurverne i Fig. 5 er derfor ogsaa kun at betragte som skønsmæssige Forlængelser af de fuldtoptrukne Dele af Kurverne, idet der ved Fastsættelsen af disse Forlængelser er taget Hensyn til de for Opstillingen i Fig. 2 gældende Forhold.

Naar man trods denne Usikkerhed ved de store Forsinkelser dog helt igennem har benyttet den i Fig. 2 skitserede Opstilling og tillige anvendt negative Figurer, til Trods for, at man ved at anvende den i Fig. 7 angivne Opstilling og tillige positive Figurer ved Tryk under Atmosfærens, kunde have opnaaet en betydelig større Sikkerhed i Bestemmelsen af de store Forsinkelser, saa er Grundene følgende: 1) Det har været nødvendigt ved denne foreløbige Undersøgelse at skaffe sig et Overblik over Forsinkelsens Afhængighed af en Række forskellige Forhold som f. Eks.

Elektroernes Beskaffenhed, Lufttrykkets Størrelse, Luftartens Beskaffenhed, Feltets Intensitet, Ionisationstilstanden og Fugtighedstilstanden. Det har derfor været nødvendigt at foretage et stort Antal Bestemmelser (mellem 3 og 4000). Hver enkelt af disse maa som Følge heraf kunne foretages nogenlunde simpelt. Vi har derfor ikke anvendt positive Figurer, der kun ved Tryk, der er lavere end Atmosfæretryk, giver skarpe Skillelinier, men har i Hovedsagen benyttet negative Figurer ved Atmosfæretryk. 2) Til Anvendelsen af den i Fig. 7 viste Opstilling har man hidtil savnet den nødvendige Plads. 3) Hele Undersøgelsen, der maa betragtes som den første i sin Art, giver en Række Resultater, der paa forskellige Punkter staar i skarp Modstrid med den hidtil gældende Opfattelse. Vi har derfor ment det rigtigt i nærværende Arbejde at lægge mere Vægt paa at faa en alsidig og samtidig i Hovedsagen rigtig Fremstilling af Gnistforsinkelsens Afhængighed af de forskellige Forsøgsbetingelser, fremfor at give en med alle til Raadighed staaende Hjælpemidler og med den yderste, opnaaelige Nøjagtighed gennemført Undersøgelse af et enkelt Afsnit. Saadanne Enkeltundersøgelser vil uden Tvivl være ønskelige, naar den teoretiske Behandling af de i nærværende Arbejde fundne Resultater er bragt til en foreløbig Afslutning.

3. Foreløbige Forsøg.

Konstruktionen af de til Undersøgelserne anvendte Forsøgsognistbaner eller Gnistmikrometre (g_1 og g_2 i Fig. 2) fremgaar af Fig. 8. De egentlige Gnistelektroder var i Almindelighed Kugler med en Diameter paa 10 mm og anbragte paa cylindriske Forlængelsesstykker (se Fig. 24 S). Disse er forsynede med Huller og Opslidsninger paa en saadan Maade, at de passer stramt ind paa Akserne af de

viste Mikrometre. Tilledningen foregaar dels gennem Mikrometrenes Stel, dels gennem de viste Fjedre, der danner Kontakt direkte med Gnistelektroderne. Gnistmikrometrets to Halvdele er anbragt paa et Ebonitstykke, der atter er fastgjort til en Træplade. Ledningernes og Shuntmodstan-

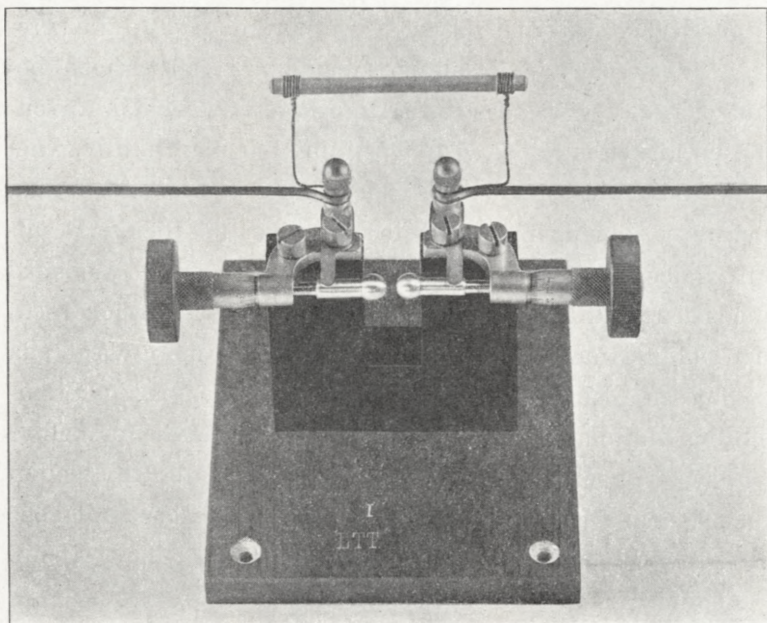


Fig. 8. Gnistmikrometer.

denes Tilknytning til Gnistmikrometret fremgaar klart af Fig. 8.

Gnistlængden kan bestemmes ved Aflæsning paa Mikrometrene, idet Nulstillingen — Berøring mellem de to Gnistelektroder — enten fastlægges ad elektrisk Vej ved Hjælp af et Element og en Telefon eller et Galvanometer, eller ved Hjælp af et svagt forstørrende Mikroskop med Okularmikrometer. I sidste Tilfælde føres Elektroderne ikke helt sammen til Berøring, men kun til en Afstand af f. Eks.

0,01 mm. Vi har i Almindelighed anvendt den sidste Fremgangsmaade, der dels er den bekvemmeste, dels undgaar de Fejlkilder, der kan opstaa ved Elektrodernes Berøring og ved Maalestrømmens Gennemgang.

Med den i Fig. 2 viste Opstilling, hvor Gnismikrometrene g_1 og g_2 var af den i Fig. 8 viste Konstruktion, blev der anstillet en Række indledende Forsøg, der foretoges paa den Maade, at Gnislængden i g_1 og g_2 gjordes eens, som Regel begge lig med 0,5 eller 1,0 mm, medens man efter Udladningen paa Pladen P iagttog, hvilken af de to Gnister der var kommen først. Længden af den primære Gnist i G var som Regel $L = 3$ mm.

Gnistelektroderne pudsedes før hver Udladning omhyggelig med et Stykke meget fint Smergelpapir, og der anvendtes dels Elektroder af samme Metal i begge Gnismikrometre, dels Elektroder af forskellige Metaller. Under alle Forhold syntes det at være fuldstændig tilfældigt, hvilken af de to Gnister der kom først. Kun i forholdsvis faa Tilfælde kom de lige hurtig, saaledes at Skillelinien paa Pladen P laa midt mellem de to Elektroder A_1 og A_2 . Ofte var Tidsforskellen saa stor, at der slog en Gnist over nede paa Pladen P , selv om den mindste Afstand mellem A_1 og A_2 var lig med eller lidt større end Gnislængden l i g_1 og g_2 .

I Overensstemmelse med den gængse Opfattelse af Forholdene ved Gnistens Opstaaen laa det nær at sætte denne stærke Variation af Gnistforsinkelsen i Forbindelse med en tilsvarende Variation af Ionisationstilstanden i Gnistrumene g_1 og g_2 . Vi søgte derfor, ved Hjælp af den i Fig. 9 viste Opstilling at fjerne alle Ioner i det ene Gnistrum g_1 . Men til Trods for, at den E.M.K. af Batteriet B varieredes mellem en Brøkdelt Volt og op til 100 Volt ligesom Fortegnet for B skiftedes, saa syntes dog Tilstedeværelsen af Batteriet

ikke at udøve nogen som helst Indflydelse paa Størrelsen af Gnistforsinkelsen i g_1 . Snart var g_1 hurtigere end g_2 , snart var det omvendte Tilfældet, snart var de lige hurtige, og det paa samme uregelmæssige Maade som før. Paa den anden Side kan det jo ikke ret vel betvivles, at den lille Potentialforskel mellem Kuglerne — i hvert Fald i nogle af Tilfældene — uden at fremkalde Stødionisation maa have fjernet de allerfleste af, ja saa godt som alle de tilfældige Ioner i g_1 . Gnistforsinkelser i g_1 burde derfor, ifølge den

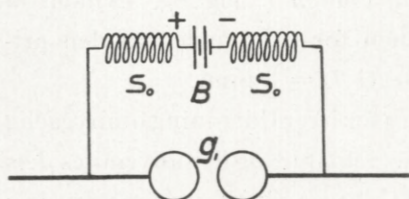


Fig. 9. B Batteri til Afionisering af Gnistrummet g_1 . S_0 Selvinduktionsruller til at hindre den elektriske Bølges Udligning over B .

gængse Teori, som Regel have været større end i g_2 . Disse Forsøg lader sig saaledes ikke bringe i Overensstemmelse med denne Teori.

Vi udsatte dernæst Gnistrummet g_2 og de tilhørende Elektroder for en kraftig Bestraaling af ultraviolet Lys fra en Buelampe. Det viste sig da, at Gnisten i g_2 aldrig kom bagefter Gnisten i g_1 , men af og til kom de to Gnister lige hurtig. Da Antallet af Ioner i g_2 maa være meget stort, i g_1 meget ringe, maatte man efter den gængse Anskuelse vente, at Gnisten i g_1 altid kom bagefter Gnisten i g_2 .

De sidstnævnte Forsøg styrker saaledes heller ikke den nævnte Opfattelse, ifølge hvilken Gnistforsinkelsen for en given Spænding og Gnistlængde kun er afhængig af Gnistrummets Ionisationstilstand. Og alle Forsøg, vi gjorde paa at bringe Overensstemmelse tilveje mellem Forsøgsresultaterne og denne Opfattelse, mislykkedes fuldstændig.

Derimod viste det sig, at Beskaffenheden og Tilstanden

af Gnistelektrodernes Overflader var af afgørende Betydning for Gnistforsinkelsens Størrelse. Vi havde til at begynde med ikke ofret dette Punkt nogen større Opmærksomhed, men som nævnt foran kun sørget for, at Elektroderne forud for hver Udladning pudsedes omhyggelig med meget fint Smergelpapir.

Det viste sig nu, at Grunden til den uregelmæssige Forsinkelse maatte søges i, at det til Afpudsning af Elektroderne benyttede Smergelpapir ikke var fuldstændig rent, men stedvis svagt fedtet. Fortsatte Undersøgelser viste, at Forsinkelserne gennemgaaende blev mindre og samtidig langt mindre variable, naar man anvendte Karborundumpapir i Stedet for Smergelpapir. Er det anvendte Karborundumpapir fuldstændig rent, opnaar man, som vi vil se i næste Afsnit, ganske regelmæssige Forhold. Vi skal hermed gaa over til Omtalen af de ved de egentlige Forsøg fundne Resultater.

4. Gnistforsinkelse ved „ren“ eller „aktiv“ Katode.

Den minimale Forsinkelse.

Ved en ren Elektrode forstaas her og i det følgende en Elektrode, der er pudset omhyggelig med fuldstændig rent Karborundumpapir. Det samme Sted paa Karborundumpapiret maa kun anvendes een Gang, og man maa omhyggelig undgaa at røre med Fingrene ved de Dele af Papiret, der senere skal benyttes, ligesom dette med stor Omhyggelighed maa beskyttes mod Forurening med Fedt, Olie eller lignende. Derimod har Karborundumpapirets større eller mindre Finhed ikke saa meget at sige. Vi har almindeligvis benyttet Finheder mellem Nr. 000 og Nr. 40. Det første af disse Numre betegner vi i det følgende som fint, det

sidste som grovt. Pudsningsen foregik paa den Maade, at Elektroden sattes op i en lille Drejebænk, der under Pudsningsen holdtes i hurtig Rotation af en Elektromotor. Karborundumpapiret førtes med Haanden frem og tilbage over Elektrodens Overflade.

For at give et Indtryk af Forskellen i Overfladens Beskaffenhed paa Messingkugler, pudset henholdsvis med fint

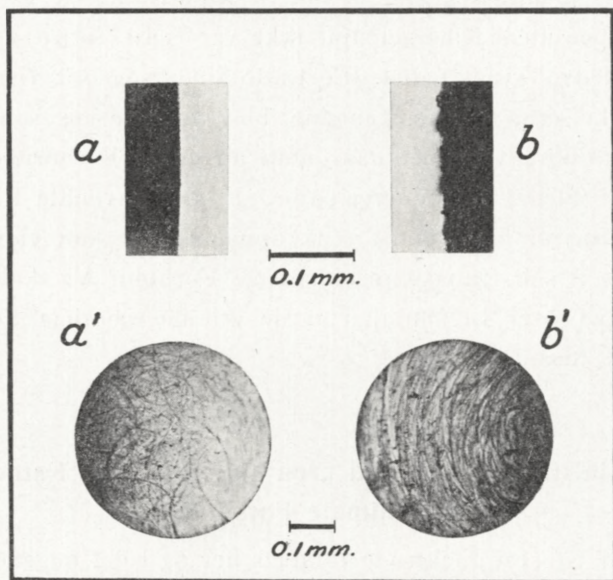


Fig. 10. Mikrofotografier af fint (*a*, *a'*) og grovt (*b*, *b'*) pudsede Kugler.

og grovt Papir, er i Fig. 10 vist Gengivelser af Mikrofotografier af saaledes behandlede Kugler, idet *a* og *a'* er fra en fint pudset, *b* og *b'* fra en grovt pudset Elektrode. Fig. *a* og *b* viser forstørrede Gengivelser af Kuglernes Profil og Fig. *a'* og *b'* af almindelige Mikrofotografier af smaa Dele af Kuglernes Overflader. Man ser, at der i de to Tilfælde rent geometrisk set er stor Forskel paa Kuglernes Overflader.

Hvor andet ikke udtrykkelig fremhæves, bestaar Elektroderne af 10 mm Messingkugler, og Gnistdannelsen foregaar i atmosfærisk Luft og ved Atmosfæretryk.

Primærgnistens Længde betegnes i det følgende ved L , Længden af den undersøgte Gnist ved l , eventuelt l_2 , naar Gnistbanen g_1 ikke er kortsluttet.

Det viser sig nu, at naar Katoden er ren, saa er Forsinkelsen — i hvert Fald indenfor de her undersøgte Grænser — ganske uafhængig af Anodens Tilstand — om den er ren eller snavset — og af Luftens Ionisationstilstand. Til et givet Værdisæt af L og l svarer en ganske bestemt Forsinkelse, og denne Forsinkelse er den mindste, med hvilken en Gnist overhovedet kan dannes, naar L og l har de angivne Værdier. Vi kalder derfor i det følgende denne Forsinkelse τ_{\min} .

I Fig. 11 er, for $L = 10$ mm, vist, hvorledes τ_{\min} varierer med Længden l af den undersøgte Gnist. Naar l vokser fra Nul til 7 mm, vokser τ_{\min} fra Nul til omkring 15×10^{-8} Sek. For l over 7 mm bliver den minimale Forsinkelse saa stor, at den, som omtalt foran, falder udenfor det Maaleomraade, man med den anvendte Maalemetode direkte kan beherske.

Den i Fig. 11 viste Kurve angiver, som nævnt, den minimale Forsinkelse. Blandt det meget store Antal Bestemmelser, der er foretaget¹, giver ikke en eneste en Forsinkelse, der er kendelig mindre end den ved Kurven bestemte Værdi af τ_{\min} , og Afvigelserne nedad er aldrig større, end at de kan skyldes den med Maalingernes Udførelse forbundne Unøjagtighed.

Ved Maalingerne paa de fotografiske Plader faar man

¹ Der er ialt foretaget over 3000 Bestemmelser.

ikke direkte bestemt Forsinkelsen, men derimod den af LICHTENBERG-Figuren i Ventetiden gennemløbne Vej a . I Fig. 12 er vist sammenhørende Værdier af l' og a for $L = 10$ mm, og under Benyttelse af den i Fig. 5 givne Sammenhæng mellem a og t_0 kan man saa uden videre tegne den i Fig. 11 viste (l, τ_{\min}) -Kurve. Kun paa et enkelt

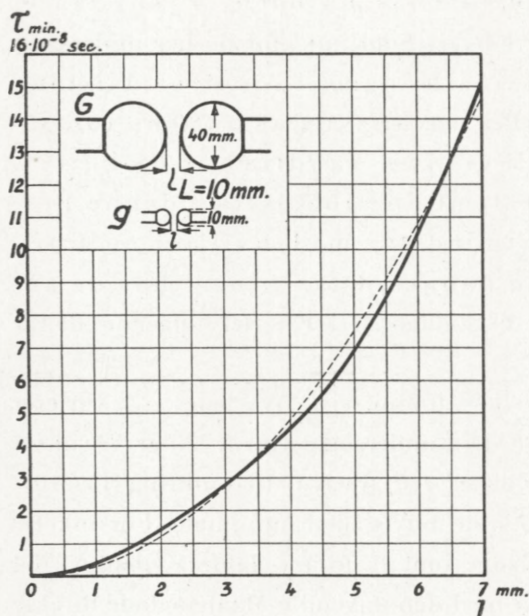


Fig. 11. Forsinkelsen τ_{\min} 's Afhængighed af Gnistlængden for ren Katode. Den punkterede Linie fremstiller Parablen $\tau_{\min} = c \cdot l^2$. G Primærgnistbane. g Undersøgte Gnistbane.

parallelt med Gnistbanen at anbringe en lille Kondensator, hvis Kapacitet ogsaa er C' . Forskellen mellem Forsinkelsen med og uden Kondensator vil da med tilstrækkelig Tilnærmelse være den søgte Korrektion. Den sidstnævnte Metode er anvendt i Fig. 12. Den punkterede Kurve viser de ukorrigerede, den fuldt optrukne de korrigerede Værdier

Punkt maa der foretages en Korrektion, nemlig nede for ganske smaa Værdier af l . Her vil nemlig den ikke helt forsvindende Kapacitet, C' , mellem de to Kugler, der danner Elektroderne, bevirke en ekstra Forsinkelse. Man kan korrigere for denne paa flere Maader, f. Eks. ved at anvende Kugler med en tilsvarende lille Diameter, eller ved

af a . For Værdier af l , der er større end 1,5 mm, spiller denne Korrektion ingen nævneværdig Rolle.

Særlig Interesse har det Forhold, at Forsinkelsen i det her betragtede Tilfælde, hvor Katoden er ren, er uafhængig af den Tilstand, hvori Anodens Overflade befinder sig. Om denne er ren, pudset med fint eller grovt

Karborundumpapir, eller om den er fedtet eller overtrukket med en Oliehinde, eller iltet og anløben efter Passagen af et stort Antal Gnister, det er alt uden Indflydelse paa Forsinkelsen — saalænge Katoden er ren.

Ganske stik imod den hidtil almindelige Opfattelse er Forsinkelsen ligeledes

fuldstændig uafhængig af Luftens Ionisationstilstand. Forsinkelsen er ganske den samme, nemlig lig med τ_{\min} , hvad enten Gnistrummet og Elektroderne bestraaes af Lyset fra en kraftig Buelampe i omkring 20 cm Afstand fra Gnistrummet, eller dette udsættes for Straaling fra et kraftigt Radiumpræparat, anbragt umiddelbart under Gnistbanen, eller endelig naar Gnistrummet, med Udeluk-

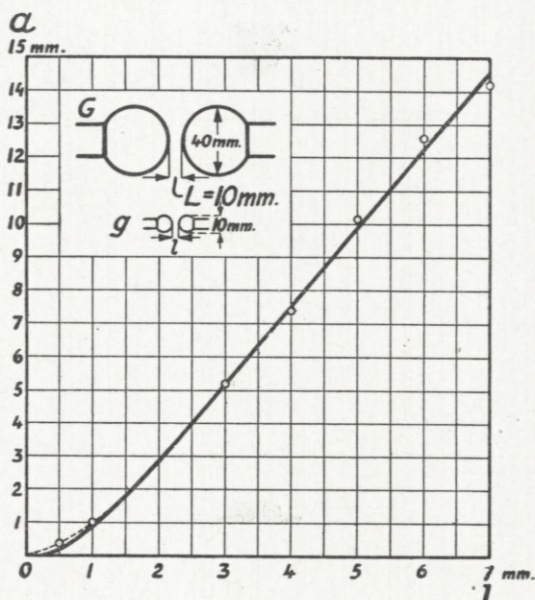


Fig. 12. Forsinkelsen α 's Afhængighed af Gnistlængden for ren Katode. G Primærgnistbane. g Undersøgte Gnistbane.

kelse af al Straaling, anbringes fuldstændig i Mørke, og tilfældige Ioner fjernes fra det ved Anvendelse af den i Fig. 9 viste Opstilling.

For ren Katode er Forsinkelsen ligeledes uafhængig af Luftens Fugtighedsgrad. Dette er prøvet baade for atmo-

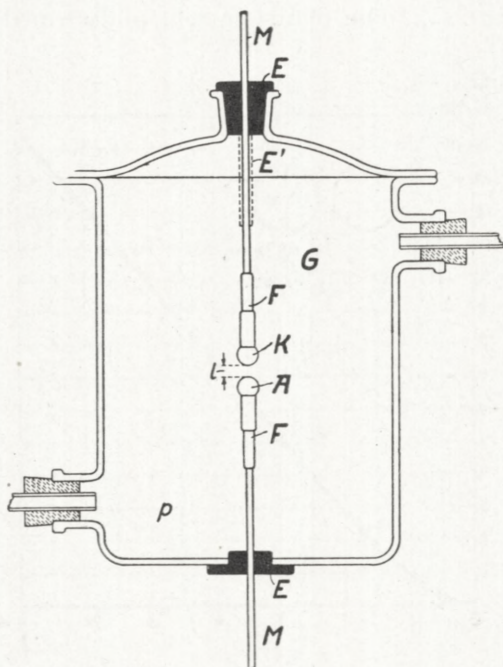


Fig. 13. Glasbeholder til Gnistforsøg. *K* Katode. *A* Anode. *E* Mellemskykker, der kan skrues kortere eller længere ind paa de gennemgaaende Stænger *M*, hvorved Gnistlængden *l* kan varieres.

sferisk Luft og for Brint. Ved disse Forsøg var Gnistbanen indesluttet i den i Fig. 13 viste Glasbeholder, ind i hvilken den anvendte Luft i det ene Tilfælde blev suget gennem to

Vadskeflasker med Vand, og i selve Beholderen var der anbragt en Skaal med Vand, medens i det andet Tilfælde Luft blev suget gennem to Vadskeflasker med koncentreret Svovlsyre

og derefter gennem et Rør med Fosforpentoxyd, ligesom der var anbragt noget af sidstnævnte Tørremiddel i selve Beholderen. Baade for atmosfærisk Luft og for Brint var Forsinkelsen τ_{\min} i begge Tilfælde nøjagtig den samme, selv om Tørringsmidlerne havde virket i et Døgn og der-

over. Den af J. J. THOMSON¹ og andre særlig for Brintens Vedkommende iagttagne, store Indflydelse af Luftens Fugtighed paa Gnistforsinkelsen maa formentlig hænge sammen med, at den benyttede Katode ikke har været ren i den her benyttede Betydning af dette Ord.

Den minimale Forsinkelse er, indenfor de ved den foreløbige Forsøgsnøjagtighed givne Grænser, ogsaa den samme for Katoder af Bly, Tin, Aluminium, Zink, Kobber, Messing, Jern, Sølv, Guld, Platin, Nikkel, Molybdæn og Wolfram. Det synes heraf at fremgaa, at den minimale Forsinkelse er uafhængig af Katodemetallets Natur.

Fig. 11 viser, at τ_{\min} , for konstant Længde af Primærgnisten og for smaa Værdier af Sekundærgnistens Længde l , ret nær er proportional med 2den Potens af dennes Længde, altsaa

$$\tau_{\min} = c \cdot l^2, \quad (5)$$

gældende for smaa Værdier af l .

Ogsaa andre Maalingsrækker bekræfter den omtrentlige Rigtighed af (5). Det skal dog straks fremhæves, at da man ifølge Formel (2) har, at $\tau_{\min} \rightarrow \infty$ samtidig med, at $l \rightarrow \frac{4}{3}L$, saa kan (5) kun være en Tilnærmelsesformel, der endda kun kan benyttes for saadanne Værdier af l , der er mindre end L .

5. Den minimale Forsinkelses Afhængighed af Lufttrykket. (Forsinkelsen i andre Luftarter.)

Der er desuden foretaget en Række Maalinger af den minimale Forsinkelses Afhængighed af Lufttrykket, p , i det undersøgte Gnistrum, idet den minimale Forsinkelse, som vist i det foregaaende, altid fremkommer, naar Katoden er

¹ J. J. THOMSON: Phil. Mag. (5), Vol. 36, p. 318—327. 1893.

ren. Nogle af Resultaterne fra disse Forsøg er fremstillet i Fig. 14—16. Forsøgene er foretaget i Luftarterne: atmosfærisk Luft, Ilt, Brint og Kulsyre og for forskellige Længder af Primærgnist L og Maalegnist l . Lufttrykket har i nogle af Forsøgene varieret fra 0,1 til 5000 mm Hg.

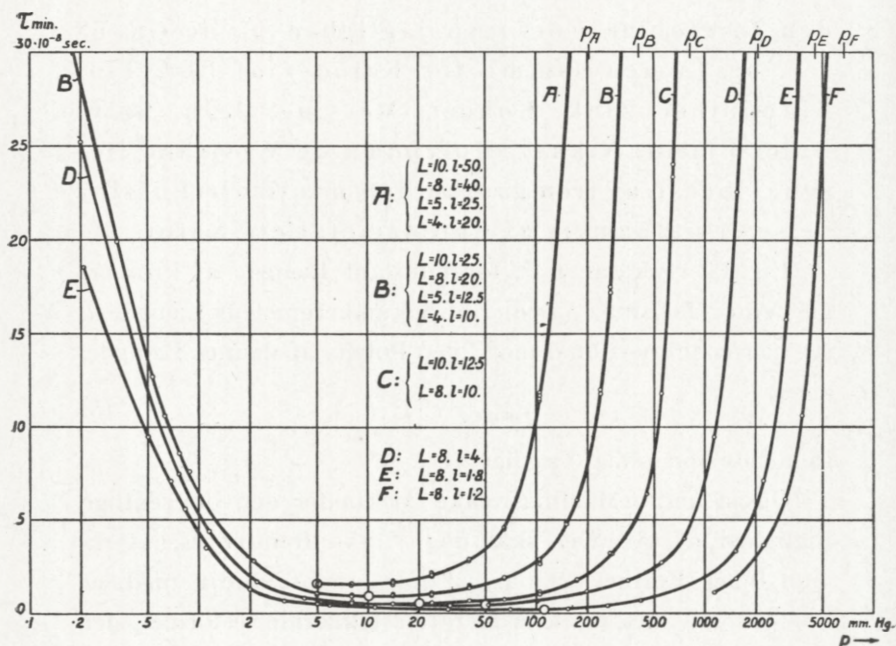


Fig. 14. Forsinkelsens Afhængighed af Lufttrykket for atmosfærisk Luft. De Punkter, for hvilke τ_{\min} er Minimum, er markeret ved Cirkler.

For Tryk, der er lig med eller mindre end Atmosfæretryk, er Forsøgene udførte ved Hjælp af det i Fig. 13 viste Glasapparat, medens der for højere Tryk er anvendt det i Fig. 17 skitserede Apparat.

I Fig. 14 og 16 er som Abscisse afsat Logaritmen af Lufttrykket, i Fig. 15 selve Lufttrykket p , medens Forsinkelsen i alle Tilfælde er afsat som Ordinater. For alle de

undersøgte Luftarter og for alle Værdier af Forholdet $\frac{L}{l}$ — altsaa for alle Feltintensiteter — er Forløbet af (p, τ_{\min}) -Kurverne i Hovedsagen det samme.

I Fig. 14 og 15 er foroven markeret de Værdier, P , af Luftrykket i Maalegnistrummet, for hvilke

$$P \cdot l = 760 \cdot \frac{4}{3} \cdot L,$$

eller

$$P = \frac{4}{3} \cdot 760 \cdot \frac{L}{l} = 1013 \cdot \frac{L}{l}. \quad (6)$$

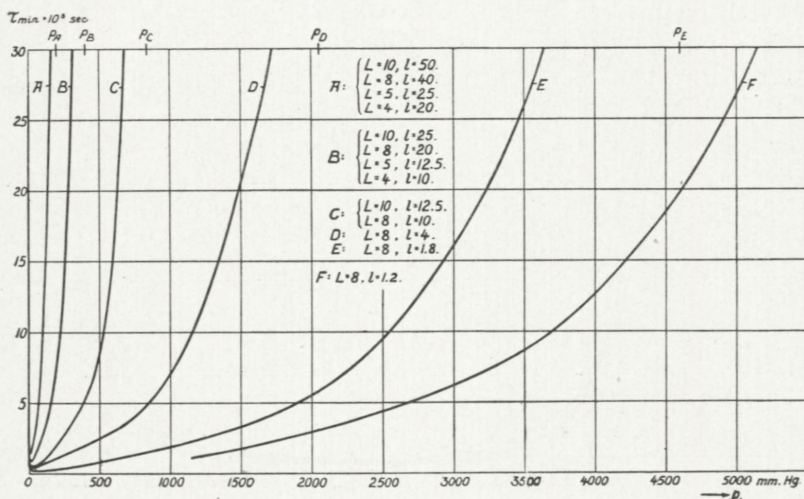


Fig. 15. Forsinkelsens Afhængighed af Luftrykket for atmosfærisk Luft. Selve de ved Forsøg bestemte Punkter er ikke indtegnede. Figuren har kun til Hensigt at give et Overblik over (p, τ_{\min}) -Kurvernes almindelige Forløb.

Det saaledes bestemte Tryk ligger i Nærheden af det højeste, ved hvilket der overhovedet under de givne Forhold kan opstaa en Gnist i det undersøgte Gnistrum. Man maa derfor antage, at den minimale Forsinkelse her antager forholdsvis meget store Værdier, eller udtrykt paa anden Maade, at $\tau_{\min} \rightarrow \infty$, naar $p \rightarrow P$. Denne Relation synes at være tilfredsstillende i alle de undersøgte Tilfælde.

Fælles for alle (p, τ_{\min}) -Kurver er, at τ_{\min} ved højere Tryk aftager stærkt med aftagende Lufttryk og derefter mindre og mindre stærkt indtil Forsinkelsen for et vist Tryk, p' , der synes at ligge omkring

$$p' = 25 \frac{L}{l} \text{ mm Hg.}, \quad (6)$$

antager sin absolut mindste Værdi, $\tau_{\min \min}$. Aftager Trykket

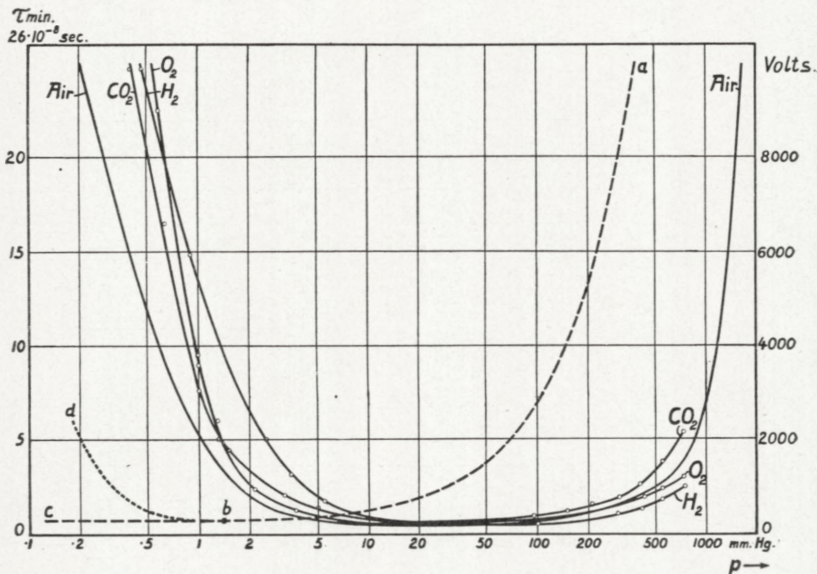


Fig. 16. Forsinkelsens Afhængighed af Lufttrykket for atmosfærisk Luft, Brint, Ilt og Kulsyre. Den punkterede Linie, hvortil som Ordinater svarer de paa højre Side angivne Spændinger, angiver Gnistspændingen som Funktion af Lufttrykket for atmosfærisk Luft. $L = 8$ mm, $l = 4$ mm.

yderligere ned under en Værdi, der ved de hidtil udførte Forsøg ligger i Nærheden af 2 mm Hg., saa stiger Forsinkelsen meget stærkt, indtil den mellem 0,1 og 0,2 mm Hg. antager saa store Værdier, at de ligger udenfor Maaleomraadet.

I Fig. 14 er ved Cirkler markeret de Punkter, i hvilke

τ_{\min} skønnes at være Minimum, og i efterfølgende Tabel er angivet de tilsvarende Værdier af p' og $\tau_{\min \min}$. Disse Værdier er dog kun at betragte som foreløbig orienterende.

Tabel 1. Minimumsværdier af den minimale Forsinkelse.

Kurve	A	B	C	D	E
$\frac{L}{l}$	5	2,5	1,25	0,5	0,225
p' (mm Hg.)	5	10	20	50	111
$p' \cdot \frac{L}{l}$	25	25	25	25	25
$10^8 \cdot \tau_{\min \min}$ (Sek.)	1,6	0,9	0,6	0,4	0,2

Parallelt med det ejendommelige Forløb af (p , τ_{\min})-Kurverne gaar en tilsvarende, udpræget Forandring i Gnistens Udseende. Til Anskueliggørelse heraf er der paa Fig. 18 (Pl. I) og 19 (Pl. II) i Rækkerne mærket S vist en Serie Fotografier af saadanne Gnister optagne ved forskellige Tryk i den i Fig. 13 viste Beholder. Primærgnistens Længde var $L = 5$ mm, mindste Elektrodeafstand (»Gnistlængden«) i de fotograferede Gnister 6 mm (Elektrodekuglernes Diameter 10 mm). Optagelsen blev iøvrigt foretaget under Anvendelse af den i Fig. 2 viste Opstilling, idet Beholderen i Fig. 13 var indskudt i Stedet for g_2 , medens g_1 var kortsluttet. Tallene under Billederne angiver Lufttrykket i mm Hg. Ved Tryk fra 6 mm Hg. og nedad var Lysintensiteten saa ringe, at en enkelt Gnist ikke gav et tilstrækkelig kraftigt Billede; der er derfor i disse Tilfælde taget flere Gnistoptagelser paa samme Plade, og Tallene i Parentes angiver Antallet af Gnister.

Fig. 18 (Pl. I) og 19 (Pl. II) viser, at ved Atmosfæretryk er Gnisten ganske tynd og skarp og følger den korteste

Vej mellem de to Elektroder. Med aftagende Tryk bliver Gnisten tykkere og blødere, men følger endnu ved 100 mm Hg. den korteste Linie mellem Elektroderne. Ved 52 mm Hg. begynder dette ikke at være Tilfældet længere; der er her

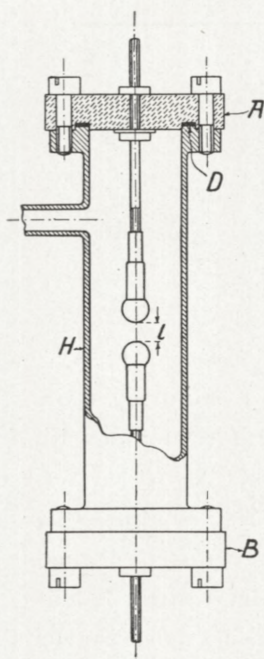


Fig. 17. Gnistbeholder for højere Tryk.
H Messingrør. A og B Ebonitplader. D Gum-miring til Tætning.

noget skævt og geometrisk lidet vel defineret over Gnisten. Denne Tendens udvikler sig mere og mere, efterhaanden som Trykket aftager. Ved $p = 14,8$ er det meget tydeligt, at Gnisten ikke længere har nogen Tendens til at følge den korteste Vej mellem Elektroderne, ligesom dens »Rumfang« er blevet forholdsvis meget stort. Ved endnu lavere Tryk er det ganske tydeligt, at Gnisten fortrinsvis søger længere Veje, og desto længere, jo lavere Trykket er. Denne længere Vej fremkommer paa den Maade, at Gnistens Udgangspunkt paa Katoden, efterhaanden som Lufttrykket aftager, rykker længere og længere bort fra Anoden. Dette er meget tydeligt for 6 og 4 mm's Tryk. Ved 2,5, 1,5 og 0,9 mm's Tryk ligger Udgangspunktet paa Katoden saa langt borte fra selve Gnistbanen, at det ikke er kommet med paa Fotografiet; det samme er Tilfældet med de to paa Fig. 19 (Pl. II) viste Fotografier svarende til Trykkene 0,6 og 0,31 mm Hg. For direkte at vise dette er der ved Forsøget under 0,85 mm Tryk skudt et Ebonitrør over den øverste Del af Katoden (E' i Fig. 13) og det tilsvarende Billede er taget i mindre Maalestok, saaledes at baade selve Gnistbanen og Ebonit-

rørets nederste Ende er kommen med paa Billedet. Det fremgaar af dette, at den kraftigste Del af Lyset fra Katoden udgaar fra Messingstangen lige under Ebonitrøret, saa langt borte fra Anoden som overhovedet muligt. Ved de lavere Tryk fyldtes hele Beholderen af Lys. Karakteristisk er det, at der selv ved det laveste af de undersøgte Tryk udgaar et forholdsvis kraftigt Lys fra Anodekuglens nærmeste Omgivelser.

Det ligger nær at sammenligne disse Forhold, hvor Gnistbanen pludselig udsættes for en høj Spænding, med de Forhold, der, for samme Elektrodeafstand og samme Tryk, gør sig gældende, naar Spændingen forholdsvis langsomt vokser op til Gennemslagsværdien.

Paa Fig. 18 (Pl. I) og 19 (Pl. II) er der derfor i de med P betegnede Rækker vist en Serie Billeder, der er tagne under de sidstnævnte Forhold. Den undersøgte Gnistbane var her indskudt direkte i Serie med Elektrisermaskinen. Tallene under Billederne angiver, ligesom i Rækken S , Lufttrykket i mm Hg., medens Tallene i Parentes angiver det Antal Sekunder, Spændingen har været holdt paa. Selve Udladningen er som Regel intermitterende.

En Sammenligning mellem P og S Rækkerne viser, at der er en meget stor Forskel paa Udladningens Karakter i de to Tilfælde. P Rækken er, ihvert Fald ned til Tryk paa omkring 0,3 mm Hg., karakteriseret ved det stærkt udviklede og meget kraftige Katodelys. Man faar et umiddelbart Indtryk af, at selve Udladningen i de to Tilfælde foregaar paa ret forskellige Maader. Vi kommer i II. Del af denne Afhandling nærmere ind paa dette Forhold.

Det ligger ligeledes nær at sammenligne den i Fig. 16 viste (p, τ_{\min}) -Kurve for atmosfærisk Luft med den til den samme Elektrodeafstand svarende (p, V) -Kurve, hvor V

betegner Gnistspændingen. En saadan Sammenligning er foretaget i Fig. 16, hvor (p, V) -Kurven er mærket abc , medens Kurvestykket bd angiver det Forløb, (p, V) -Kurven vilde have faaet, hvis Elektroderne havde været plane og parallelle, og hvis Gnisten var bleven tvungen til at søge over ad den korteste Vej mellem disse. Man ser, at (p, τ_{\min}) -Kurven og (p, V) -Kurven i Hovedsagen har samme almindelige Forløb for høje Lufttryk og ned til Minimumsværdierne. Men den Værdi af p , for hvilken V er Minimum, er meget lavere end den, for hvilken τ_{\min} har sin mindste Værdi.

For Tryk under Minimumspunktet er Forløbet af de to Kurver derimod ganske forskelligt. (p, V) -Kurven holder sig — som bekendt — under de her foreliggende Forhold nede paa den lave Minimumsværdi, som antydet ved Liniestykket bc . (p, τ_{\min}) -Kurven bøjer derimod for disse lave Tryk meget stærkt i Vejret, saaledes at τ_{\min} her meget snart antager saa store Værdier, at de ikke kan maales ved Hjælp af den benyttede Opstilling.

Foruden af Luftartens Natur og af Trykket afhænger Forsinkelsen, som det bl. a. fremgaar af Fig. 14, i første Linie af Forholdet $f = \frac{L}{l}$, altsaa af den elektriske Feltintensitet. Efter de hidtidige Erfaringer gælder som almindelig Regel, at for en bestemt Luftart og for et givet Tryk er Forsinkelsen desto mindre, jo højere Feltintensiteten er.

De anstillede Forsøg tyder ligeledes paa, at Forsinkelsen i Hovedsagen kun afhænger af Forholdet mellem Gnistlængderne L og l , men derimod ikke ret meget af disses absolute Længder. Det er muligt, ja vel endog sandsynligt, at en nærmere Undersøgelse med den i Afsnit 2 omtalte, noget forbedrede Forsøgsteknik vil vise, at ogsaa de absolute Gnistlængder har nogen Indflydelse paa Forsinkelsen, og at denne navnlig vokser med Gnistlængderne; men denne

Forskel er i hvert Fald for de her behandlede Forhold relativ ringe. I Fig. 14 og 15 svarer de tegnede Kurver til de nedenfor angivne Værdier af Forholdet f .

Kurve	A	B	C	D	E	F
$f = \frac{L}{l}$	0,2	0,4	0,8	2	4,44	6,67

De absolute Værdier af L og l er angivet paa selve Tegningerne og varierer, navnlig for Kurverne A 's og B 's Vedkommende, indenfor vide Grænser. En Del af Forsøgsresultaterne er markeret paa Fig. 14, men langtfra alle, idet Punkterne flere Steder vilde falde saa tæt, at det ikke vilde være muligt at holde dem ude fra hverandre. I intet Tilfælde fandtes der Afvigelser, der med fuldkommen Sikkerhed godtgjorde, at ogsaa den absolute Værdi af Gnistlængderne spillede nogen større Rolle. Dog tyder det foreliggende Materiale nærmest paa, at Forsinkelsen vokser med Gnistlængden.

I Fig. 16 er tillige vist nogle (p, τ_{\min}) -Kurver for Brint, Ilt og Kulsyre. Ved højere Tryk synes Forsinkelsen at aftage i Rækkefølgen Kulsyre, atmosfærisk Luft, Ilt, Brint. Ved lavere Tryk synes Forholdene at stille sig noget anderledes. Iøvrigt synes det almindelige Udseende af (p, τ_{\min}) -Kurverne for alle de undersøgte Luftarter at være det samme. De til Undersøgelsen anvendte Luftarter var ikke fuldstændig rene, men indeholdt nogle faa Procent af fremmede Luftarter.

For lave Tryk, hvor Gnistudladningen ikke følger den korteste Vej, er der ved de foreliggende Forsøg et Par Fejlkilder, der maaske har nogen Indflydelse paa Forløbet af (p, τ_{\min}) -Kurven til venstre for Minimumpunktet. Der optræder nemlig her Ladninger paa Glasbeholderens Vægge; man maa derfor lade hengaa nogen Tid mellem de enkelte

Maalinger. Men selv i saa Fald er det ikke sikkert, at Fejlen elimineres fuldstændig. Endelig har Elektroderne ikke været saa rene over hele deres Længde, som det maa-ske var ønskeligt. Det hovedsagelige Forløb af (p, τ_{\min}) -Kurverne vil dog ikke ændres herved, hvorfor en nærmere Undersøgelse af disse Forhold opsættes til en senere Lejlighed.

6. Gnistforsinkelse ved urene Elektroder.

Naar Katoden ikke er ren — Ordet ren taget i den i Afsnit 4 angivne Betydning — stiller Forholdene sig ganske anderledes. Gnistforsinkelsen er da, i Modsætning til Forholdene ved ren Katode, baade afhængig af Beskaffenheden og Tilstanden af Anodens Overflade og af Ionisationstilstanden i Gnistrummet. Forsinkelsen har dog i dette Tilfælde ikke nogen aldeles bestemt Værdi, men kan variere fra den for ren Katode gældende Værdi τ_{\min} og op til en ved de givne Forsøgsbetingelser bestemt Maksimalværdi, der ofte er mange Gange større end τ_{\min} . Som oftest ligger Forsinkelsen i Nærheden af den maksimale Værdi.

Til Belysning af disse Forhold anføres nogle Forsøg over Gnistforsinkelse foretaget med urene Elektroder, Forsøg der ogsaa i nogen Grad kaster Lys over de i Afsnit 4 behandlede Forhold.

A. Forurening af Gnistelektroderne med en Blanding af Benzin og Olie.

De første Forsøg udførtes med Benzin, der blev købt som kemisk ren, og den anvendte Olie var lysegul, tyndt-flydende Urmagerolie. Forureningen blev foretaget ved, at

de i Forvejen »rene« Kugler blev fugtet med een eller flere Draaber af Blandingen ved Hjælp af en Pipette, og derefter fik Lov til at staa ca. 10 Min., inden Forsøget udførtes, for at Benzinen kunde fordampe. Der anvendtes følgende tre Blandingsforhold:

Nr. 1. Ren Benzin.

Nr. 2. 5 Draaber Olie blandet med 10 cm³ Benzin (ca. 0,9 Volumenprocent Olie).

Nr. 3. 25 Draaber Olie blandet med 10 cm³ Benzin (ca. 4,5 Volumenprocent Olie).

Ved Fugtning af Katoden med disse Blandinger af Benzin og Olie fandtes følgende:

$L = 5$ mm, $l = 0,5$ mm; Anoden urørt, men paa Plads vis à vis Katoden.

Den minimale Forsinkelse $\tau_{\min} = 0,35 \times 10^{-8}$ Sekund.

Katoden fugtet med 1 Draabe af Nr. 1

$\tau = \text{ca. } 2,5 \times 10^{-8}$ Sekund.

Katoden fugtet med 1 Draabe af Nr. 2

$\tau = 4,6 \text{ à } 6,3 \times 10^{-8}$ Sekund

Katoden fugtet med 1 Draabe af Nr. 3

$\tau = 11 \text{ à } 18 \times 10^{-8}$ Sekund.

Der fremkommer altsaa en meget betydelig Ekstrafor-sinkelse ved Forureningen, men det viste sig, at denne Ekstraforsinkelse kræver nogen Tid til at naa sin fulde Værdi (fra 20 Min. til 1 Time) og tillige, at Anoden var paa Plads under Fugtningsprocessen. Grunden hertil er, som vi senere skal se, at selv et yderst ringe Olie- eller Fedtlag paa Anoden virker stærkt forsin-kende, naar Katoden i Forvejen er fedtet. Et saadant tyndt Olielag overføres nemlig paa Anoden ved Fortætning af

de ved Fordampning af Katodens Benzinlag dannede Dampe.

Er Anoden ganske ren, altsaa f. Eks. afpudset og bragt paa Plads umiddelbart før Forsøget udføres, saa bliver Forsinkelsen langt mindre end angivet ovenfor, men dog betydelig større end τ_{\min} .

Forsøgene er meget vanskelige at udføre med Benzin, da dennes Dampe, som vist, ved Fortætning paa Elektroderne giver virksomme Olie- eller Fedtlag.

Vi gik derfor over til Fugtning af Elektroderne med en Blanding af Æther og Olie.

B. Fugtning af Elektroderne med en Blanding af Æther og Olie.

Ætheren blev købt som ren Æther, og Olien var den samme, som anvendtes ovenfor. Der anvendtes følgende to Blandingsforhold:

Nr. 4. 1 Draabe Olie i 5 cm³ Æther (0,36 Volumenprocent Olie).

Nr. 5. 10 Draaber Olie i 5 cm³ Æther (3,6 Volumenprocent Olie).

Det viste sig, at ren Æther ikke giver nogen Ekstraforsinkelse, hverken paa Katoden eller Anoden¹.

I Overensstemmelse hermed viste det sig tillige, at Forsinkelsen hidrørende fra Fugtning af Katoden var uafhængig af, om Anoden var i Nærheden eller ej under Fedtningen.

¹ Ætheren maa altsaa efter dette betragtes som et til disse Forsøg tilstrækkelig rent Opløsningsmiddel.

a. Fugtning alene af Katoden (Anoden ren).

Man fandt her følgende:

$$L = 5 \text{ mm}, l = 0,5 \text{ mm}, \tau_{\min} = 0,35 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

Katoden fugtet med 1 Draabe af Nr. 4

$$\tau = 0,9 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

Katoden fugtet med 1 Draabe af Nr. 5

$$\tau = 2,8 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

Katoden fugtet med 3 Draaber af Nr. 5

$$\tau = 2,8 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

$$L = 5 \text{ mm}, l = 1,0 \text{ mm}, \tau_{\min} = 1,4 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

Katoden fugtet med 3 Draaber af Nr. 5

$$\tau = \text{ca. } 4,6 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

$$L = 5 \text{ mm}, l = 2,0 \text{ mm}, \tau_{\min} = 4,5 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

Katoden fugtet med 3 Draaber af Nr. 5

$$\tau = 11,0 - 16,5 \times 10^{-8} \text{ Sekund.}$$

Ved ovenstaaende Forsøg varede det ligeledes nogen Tid, inden Ekstraforsinkelsen naaede sin fulde Størrelse (10—20 Min.), men derefter holder den sig ogsaa konstant, naar blot Anoden er ren. Saaledes viste Billeder, tagne indtil 2 Døgn efter Fugtningen, ingen Forandring i Forsinkelsens Størrelse.

Som Eksempel paa, hvor stor Rolle Anodens Renhed spiller, kan anføres følgende: Ved et enkelt Forsøg med fugtet Katode og ren Anode holdt Forsinkelsen sig konstant paa $2,8 \times 10^{-8}$ Sek. indtil 1 Time efter Fugtningen; efter atter 1 Times Forløb var Forsinkelsen steget til $5,4 \times 10^{-8}$ Sek. og efter endnu $\frac{1}{2}$ Times Forløb til $11,0 \times 10^{-8}$ Sek., for derpaa atter at synke til $2,8 \times 10^{-8}$ Sek., da Anoden blev pudset af.

Det viser sig saaledes, at Forurening af Anoden alene giver ingen Ekstraforsinkelse, men naar Katoden i Forvejen er uren, forøges Ekstraforsinkelsen betydeligt ved selv en ganske overor-

dentlig ringe Forurening af Anoden. Af Resultaterne ovenfor for $l=0,5$ mm følger endvidere, at Forsinkelsen indenfor visse Grænser er uafhængig af Katodens Fedtningsgrad.

b. Fugtning af Anoden alene (Katoden ren).

Man fandt, som ovenfor angivet, ingen Ekstraforsinkelse af nogen Art. Dette blev prøvet flere Gange, dels ved at fugte Anoden alene og holde Katoden ren, dels ved først at frembringe en meget stor Forsinkelse ved at fugte baade Katode og Anode og derpaa, efter at have konstateret denne store Forsinkelse, atter pudse Katoden af, hvorefter kun den minimale Forsinkelse blev tilbage.

c. Forurening af begge Elektroder.

Katoden blev fugtet med 1 eller oftere 3 Draaber Nr. 5 og gav for $L = 5$ mm og $l = 0,5$ mm den sædvanlige Forsinkelse, $2,8 \times 10^{-8}$ Sek., derefter blev Anoden fugtet paa forskellig Maade, enten med ren Benzin eller med fra 1 Draabe Nr. 4 til 3 Draaber Nr. 5. og Forsinkelsen steg da i alle Tilfælde til ca. $16,5 \times 10^{-8}$ Sek. for atter at synke til $2,8 \times 10^{-8}$ Sek. efter Afpudsning af Anoden eller til den minimale Forsinkelse $0,35 \times 10^{-8}$ Sek. efter Afpudsning af Katoden. Den endelige Værdi af Ekstraforsinkelsen hidrørende fra en uren Anode holder sig konstant i Tidens Løb (konstateret for indtil 1 Døgn), men det varer nogen Tid, inden den naar op til sin fulde Værdi (fra 20 til 40 Min.), uden at det dog har været muligt at konstatere nogen Regelmæssighed her. Dog synes det, som om en meget ringe Forurening af Anoden (1 Draabe Nr. 4) er længere Tid om at gøre sig gældende end en kraftigere Fedtning.

Af ovenstaaende Forsøg fremgaar endvidere, at Ekstraforsinkelsen, hidrørende fra Anodeforurening, indenfor meget

vide Grænser er uafhængig af Anodens Forureningsgrad, idet den fremkommer med sin fulde Værdi allerede ved meget ringe Fedtning af Anoden og derpaa holder sig konstant, selv naar denne Forurening forøges meget betydeligt.

Derimod antager Anodeforsinkelsen ikke sin fulde Værdi, medmindre Katoden er fedtet tilstrækkeligt til at give den fulde Katodeforsinkelse $2,8 \times 10^{-8}$ Sek., hvilket fremgaar af følgende Forsøg ($L = 5$ mm, $l = 0,5$ mm):

Katoden blev fugtet med 1 Draabe Nr. 4 og gav derved den tidligere angivne Forsinkelse $0,9 \times 10^{-8}$ Sek. Anoden blev derefter fugtet med 1 Draabe Nr. 4, og Forsinkelsen steg da til $1,8 \times 10^{-8}$ Sek. Derefter blev Anodens Fedtning forøget gradvis op til 3 Draaber Nr. 5, men Forsinkelsen holdt sig stadig konstant paa $1,8 \times 10^{-8}$ Sek. for atter at synke til $0,9 \times 10^{-8}$ Sek., da Anoden tilsidst blev afpuddet.

Allerede for $L = 5$ mm og $l = 1$ mm er Anodeforsinkelserne saa store, at Billedet udebliver paa den fotografiske Plade. Det kunde blot konstateres, at Forsinkelsen var større end 25×10^{-8} Sek.

Foruden de nævnte Forsøg er der foretaget en Mængde andre, der alle har bekræftet de foran fremdragne Resultater.

Det fremgaar heraf, at medens Forsinkelsen for ren Katode, τ_{\min} , i hvert enkelt Tilfælde har en ganske bestemt Værdi, saa er dette ikke Tilfældet med de Forsinkelser, man faar, naar Katoden er uren. Forholdene er her ret indviklede og kan endnu ikke siges at være klarlagte i alle Enkeltheder, hvortil bl. a. ogsaa det Forhold bidrager, at Forsinkelserne, navnlig naar baade Katode og Anode er urene, som Regel er saa store, at de ligger udenfor vort nuværende Maaleomraade.

Vi skal dog ved Hjælp af de skematiske Figurer 20 og 21 give en Oversigt over de opnaaede, kvalitative Resultater.

I Fig. 20 fremstiller Kurve I den minimale Forsinkelse τ_{\min} ; Kurve II den største Forsinkelse, τ_{II} , der kan opnaas ved Forurening af Katoden, naar Anoden er fuldstændig ren.

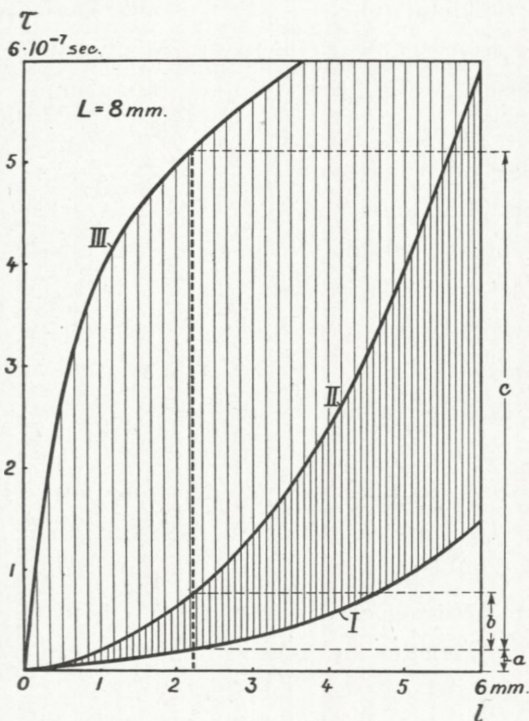


Fig. 20.

Kurve I fremstiller den minimale Forsinkelse τ_{\min} , Kurve II fremstiller den maksimale Forsinkelse τ_{II} for fuldkommen ren Anode, Kurve III fremstiller den til en vis Forureningsgrad af Katoden svarende Forsinkelse τ_{III} for uren Anode.

for smaa Værdier af Gnistlængden l antager meget store Værdier, medens Forholdet τ_{II}/τ_{\min} ligger omkring 2 til 4.

Medens Forløbet af Kurve II uden Tvivl i det store og

ren. Kurve III endelig den største Forsinkelse, τ_{III} , der kan opnaas ved Forurening af Anoden, svarende til en bestemt Forureningsgrad af Katoden. Altsaa: for ren Katode er Forsinkelsen altid givet ved Kurve I; for ren Anode ligger den altid mellem Kurverne I og II; naar Katodens Forureningsgrad ikke overstiger en bestemt Værdi, ligger Forsinkelsen altid mellem III og I. Det fremgaar af Figuren, at Forholdet τ_{III}/τ_{\min} navnlig

hele er rigtigt, stiller Sagen sig langt mere tvivlsomt med Hensyn til Kurve III, i Særdeleshed for meget smaa Værdier af l . Med nogenlunde kraftig forurenset Katode er det, selv for meget smaa Værdier af l , aldrig lykkedes at forurene Anoden i saa ringe Grad, at τ_{III} antog en forholdsvis lille Værdi. Naar An-

oden ikke var fuldstændig ren, fik man altid Værdier af τ_{III} , der var mindst 2×10^{-7} Sek. Kurven synes dog i Hovedsagen at have det angivne Forløb, idet man med Maalegnistbanen anbragt i Transformatorolie og med $l = 0,07$ mm, og $L = 5$ mm fik en Forsinkelse paa ca. 5×10^{-8} Sek. Forsinkelsen synes saaledes i alle Tilfælde at gaa ned til Nul samtidig med Gnistlængden.

Fig. 21 giver en skematisk Fremstilling af Elektrodeforureningernes Ind-

flydelse paa Gnistforsinkelsen. Med Hensyn til Betydningen af de anvendte Betegnelser henvises til Figurteksten. Figuren

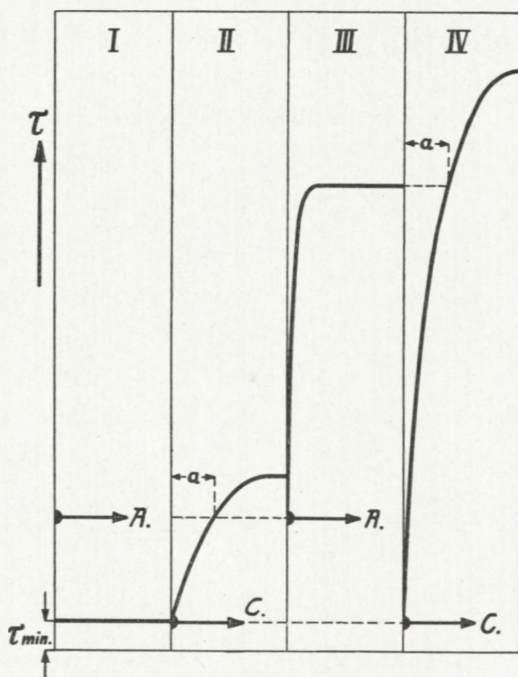


Fig. 21.

Skematisk Fremstilling af Forsinkelsens Afhængighed af Elektrodernes Forurening. De med A og C mærkede Pile angiver voksende Forureningsgrad af henholdsvis Anode og Katode; i det halvcirkelformede Udgangspunkt er vedkommende Elektrode ganske ren.

I. Katoden ren; II. Anoden ren; III. Katodeforurening konstant = a . IV. Anodeforurening konstant.

giver kun en kvalitativ Fremstilling af Forholdene, og det maa stadig erindres, at de i Afsnittene II—IV givne Kurver fremstiller Maksimumsværdier for Forsinkelserne under de angivne Betingelser. Under særlige Forhold, f. Eks. ved stærk Ionisation, kan Forsinkelsen i alle Tilfælde, som vi straks skal se, bringes ned, undertiden til Værdien τ_{\min} , men aldrig derunder.

C. Ionisationens Indflydelse ved urene Elektroder.

a. Ionisering med et Radiumpræparat anbragt umiddelbart under Gnistbanen.

Den minimale Forsinkelse forandres, som nævnt, ikke ved Ionisering. Derimod formindskes den af Forureningen fremkaldte Forsinkelse, saaledes som det fremgaar af nedenfor eksempelvis nævnte Forsøg:

$$L = 5 \text{ mm.}$$

$l = 0,5 \text{ mm.}$ Anode ren. Katode uren. Forsinkelsen formindskes fra
 $2,8 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$ til $1,8 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$

$l = 2,0 \text{ mm.}$ Anode ren. Katode uren. Forsinkelsen formindskes fra
 $13,5 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$ til $6,3 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$

$l = 0,5 \text{ mm.}$ Baade Katode og Anode urene. Forsinkelsen formindskes fra
 $13,5 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$ til $2,5 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$

og forøges atter til $13,5 \times 10^{-8} \text{ Sek.}$ efter Ioniseringens Ophør.

Ovenstaaende viser, at særlig de store Anodeforsinkelser formindskes ved Ionisering, idet Forsinkelsen er formindsket til ned under den til ren Anode svarende Katodeforsinkelse for ikke-ioniseret Gnistbane.

b. Ionisering ved Lyset fra en Buelampe anbragt i en Afstand af ca. 200 mm fra Gnistbanen.

Forsøgene blev her foretaget med $L=5,0$ mm og $l=2,0$ mm. Den minimale Forsinkelse forandres, som nævnt, heller ikke i dette Tilfælde, medens Forsinkelse paa Grund af Forurening af Katode og Anode formindskes i omtrent samme Forhold som ovenfor omtalt ved Ionisering med Radium.

7. Elektrodernes Renhed eller Aktivitet.

Det foregaaende leder naturlig til Spørgsmaalet: hvorpaa beror Elektrodernes Renhed eller Aktivitet? De foran meddelte Resultater viser, at en Elektrode af Metal — uafhængig af Metallets Art — altid er »ren« eller »aktiv« d. v. s. den giver, anvendt som Katode kun den minimale Forsinkelse, naar den umiddelbart forud for Gnistdannelsen er afpudset omhyggelig med fuldstændig rent Karborundumpapir. Er en Elektrode derimod overtrukken med en omend kun meget tynd Hinde af Olie, Fedt eller lignende, opfører den sig som »uren« og giver som Regel en Forsinkelse, der er større end den minimale.

Beror denne Forskel paa, at man ved Afpudsningen frembringer nogle ganske rene Fladeelementer paa Elektrodernes Overflader, der ved Forureningen straks dækkes af et tyndt Olie- eller Fedtlag?

Eller beror Forskellen paa, at de skarpe Kanter eller Grater, der — selv ved Anvendelsen af fint Karborundumpapir — uden Tvivl fremkommer ved Afpudsningen, ved Forureningen »sløres« af Olie- eller Fedthinderne?

De to Forklaringsmuligheder er formentlig de mest nærliggende, og vægtige Betragtninger kan anføres til Støtte for hver enkelt af dem. En nærmere Fremstilling heraf

skal opsættes til II. Del af denne Afhandling; vore Bestræbelser her skal derimod gaa ud paa saa vidt muligt eksperimentelt at afgøre, om det er rene Flader eller skarpe Kanter, det kommer an paa.

Den første Maade, hvorpaa vi søgte eksperimentelt at belyse dette Spørgsmaal, var ved Anvendelsen af fint polerede Staal- eller Nikkelkugler. Der blev ved Forsøgene dels anvendt Cyklekugler, dels paa forskellig Maade polerede Staal- og Nikkelkugler. Kuglerne søgtes rensede for Fedt- eller Oliehinder, dels ved Vaskning i rent Vand eller i fortyndet Kaliumhydroxyd, dels ved Vaskning og flere Døgns Henliggen i ren Æter.

Resultaterne af de mange Forsøg var i Hovedsagen følgende:

De blankpolerede Kugler opførte sig i Hovedsagen som karborundumpudsede Kugler, der er forurenede ved Olie-lag, altsaa som urene. Dog er de blankpolerede Kuglers »Urenhed« ikke fuldt saa stabil, som de med Olie forurenede, karborundumpudsede Kuglers. Forsinkelsen nærmer sig for førstnævntes Vedkommende hyppigere til den minimale end for de sidstnævntes. I Sammenhæng hermed staar, at Ekstraforsinkelsen for de blankpolerede Elektroders Vedkommende langt lettere ophæves ved Bestraaling med ultraviolet Lys, end Tilfældet er ved de olieforurenede Elektroder.

Forsøgene med de blankpolerede Kugler tyder saaledes i Retning af, at det er de skarpe Kanter, der er de afgørende; dog kan man ikke helt se bort fra den Mulighed, at der, selv efter den omhyggeligste Rensning, endnu kan findes minimale Lag af Fedt eller lignende paa de polerede Kugler. Imod en saadan Antagelse taler dog i nogen Grad de polerede Elektroders store Sensibilitet overfor Virkningen af ultraviolet Lys.

En anden Indvending, der kan gøres imod Anvendelsen af polerede Kugler i denne Sammenhæng, er, at der paa Grund af Krystalstrukturen altid vil findes Diskontinuiteter i Overfladen af selv den finest polerede Metalkugle. Overfladen er saaledes ikke helt fri for »Kanter«.

Vi har, foranlediget af disse Vanskeligheder og Betænkeligheder, anstillet de nedenfor beskrevne Forsøg med Vædskeelektroder, ved hvilke man i hvert Fald faar en Overflade, der er saa »glat«, som den overhovedet kan skaffes.

Vædskeelektroden var altid Katode og Forsøgene ud-

førtes ved Hjælp af den i Fig. 22 viste Opstilling. Som Vædske anvendtes dels Kviksølv dels fortyndet Svovlsyre. Kviksølvet blev før Brugen rensat for Fedt ved gentagne Gange at falde i Form af smaa Draaber gennem et 400 mm højt Lag af en stærk Opløsning af

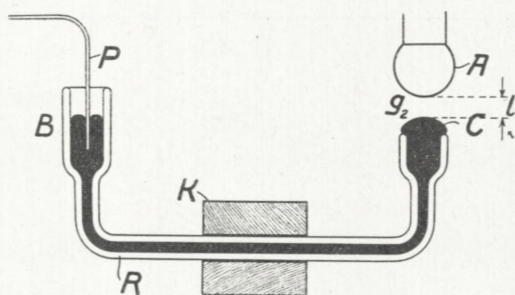


Fig. 22.

Forsøgsopstilling til Vædske-Katode. Figuren viser Forholdene for Kviksølvkatode; ved Anvendelsen af fortyndet Svovlsyre som Katode gik Ledningen P gennem hele Længden af Røret R og næsten op til Vædskeoverfladen ved C . Klemmen K , hvori Røret R er indspændt, kan indstilles mikrometrisk i Højden.

Kaliumhydroxyd og derefter gennem rent Vand. Før Brugen blev Røret R rensat omhyggeligt baade udvendig og indvendig for Fedt og lignende. Endelig lod man i nogen Tid forud for hver Forsøgsrække Vædsken (Kviksølv eller fortyndet Svovlsyre) løbe gennem Røret, idet den førtes til ved B og løb over Randen ved C . Eventuelle minimale Fedtrester eller lignende paa Rørranden ved C , der ellers vilde have været i Stand til at forurene Overfladen ved C , fjernes paa

denne Maade. Paa tilsvarende Maade fornyes Overfladen ved *C* efter hver Gnistudladning, naar ikke det modsatte udtrykkelig fremhæves.

I alle Tilfælde opførte Vædskekatoderne sig paa samme Maade som polerede Staalkugler. Nogle af de opnaaede Resultater er angivne i nedenstaaende Tabel.

Tabel 2.
Længden af Primærgnisten er *L* og af Maalegnisten *l*.

Katode	<i>L</i>	<i>l</i>	Anodens Tilstand	τ_{\max}
Kviksølv	mm	mm		
	5	2	Ren	$\geq 9 \times 10^{-8}$ Sek.
	10	2	Ren	$\geq 4 \times 10^{-8}$ »
	10	2	Uren (Olie)	$\geq 9 \times 10^{-8}$ »
	10	2	Amalgameret	$\geq 9 \times 10^{-8}$ »
Messingkugle, ren	10	2	$= \tau_{\min} = \text{ca. } 1,4 \times 10^{-8}$ Sek.
Fortyndet Svovlsyre	8	2	Ren	7×10^{-8} Sek.
Messingkugle, ren	8	2	$= \tau_{\min} = \text{ca. } 1,7 \times 10^{-8}$ Sek.

De under τ_{\max} opførte Forsinkelser er de største Forsinkelser, der maales gentagne Gange med omtrent samme Værdi. Men ind imellem kom Forsinkelser, der var betydelig mindre, men dog altid større end den til Værdierne af *L* og *l* svarende Værdi af τ_{\min} . Til Kontrol maales i begge Tilfælde Værdien af denne sidste Størrelse ved oven paa Rørenden ved *C* at anbringe en karborundumpudset Messingkugle i direkte Berøring med Vædsken. Gnistlængden *l* regnes da fra denne Kugle til Anodekuglen *A*. De saaledes fundne Værdier af τ_{\min} afviger ikke maaleligt fra de sædvanlige.

Man maa nøje passe paa, at der ikke fra Anoden *A* falder Messingkorn eller lignende ned paa Vædskeoverfladen.

Er dette Tilfældet, gaar Forsinkelsen næsten altid ned til τ_{\min} .

Ved fortyndet Svovlsyre var der maaske Mulighed for, at Gnistdannelsen fandt Sted ikke mellem Vædskeoverfladen og Anoden, men mellem Tilledningstraaden, der endte 1 à 2 mm under Vædskeoverfladen ved C, og derfra direkte til Anoden. En Betragtning af Gnisten gennem et svagt forstørrende Mikroskop viste imidlertid med Sikkerhed, at Gnistdannelsen skete fra Vædskeoverfladen.

Under Gnistudladningen deformeres Vædskens Overflade, idet den midterste Del hæves lidt. Denne Deformation foregaar dog sikkert saa langsomt, at den ikke kommer til at spille nogen Rolle for Forsinkelsens Størrelse; den maatte i modsat Fald jo ogsaa virke i Retning af en Formindskelse af denne.

Ved hver Gnistudladning forurenes Kviksølvoverfladen kendeligt og fornyes Overfladen ikke efter hver Gnist, faas til en vis Grad en med Gnisttallet voksende Forsinkelse.

Ligesom ved rene, polerede Metalkugler er ogsaa disse Vædskekatoder meget følsomme overfor Bestraaling med ultraviolet Lys, idet Straalingen fra en Buelampe i omkring 20 cm Afstand som Regel bringer Forsinkelsen ned til τ_{\min} .

Disse Forsøg med Vædskekatoder tyder saaledes bestemt paa, at det er de skarpe Kanter, det kommer an paa, og ikke de rene Flader.

Paa den anden Side viser det sig, at en Fugtning med rent Vand af en ren (karborundumpudset) Katode (Messing) ikke forøger Forsinkelsen, der selv efter Fugtningen kun er lig med τ_{\min} . Vi kommer tilbage til dette Spørgsmaal i II. Del af dette Arbejde.

8. De af Gnisterne selv bevirkede Ændringer i Tilstanden af Elektrodernes Overflade. Hertz's Effekt.

a. Gnistudladningens Indvirkning paa rene Elektroder.

Det viser sig, at selve Gnistudladningen virker »forurenende« eller »forsinkende« paa en i Forvejen »ren« Katode. Virkningen af selve Gnisten er dog som Regel ikke stor, naar man anvender den i Fig. 2 viste Opstilling. Dette skyldes i hvert Fald tildels, at den Elektricitetsmængde, der passerer Gnistbanen ved den nævnte Opstilling, kun er ringe.

Man kan undersøge den af selve Gnistudladningerne forarsagede ekstra Gnistforsinkelse paa følgende Maade: Først bestemmes ved »ren« Katode den minimale Forsinkelse τ_{\min} ; derefter lader man — uden at ændre noget i Opstillingen og uden Afpudsning af Elektroderne — paa sædvanlig Maade efter hinanden foregaa n Gnistudladninger, idet man lader hengaa saa lang Tid mellem paa hinanden følgende Gnister, at de til Pladen P overførte Ladninger kan udligne sig over Shunten R . Man maaler da atter Forsinkelsen τ_n . Ekstraforsinkelsen, $\tau_g = \tau_n - \tau_{\min}$, vil da i Almindelighed vokse noget med Gnistallet n , men ikke stærkt. Resultaterne af de anstillede Forsøg var i Hovedsagen følgende:

Naar l er meget mindre end L , saaledes at τ_{\min} er lille, saa vokser τ_g saa langsomt med n , at en direkte Paavisning er vanskelig, bl. a. fordi Elektroden ogsaa uden Gnistdannelse kan forurennes ved længere Tids Henstand i Luften. For store Værdier af l i Forhold til L — f. Eks. $l = 0,8 L$ til $l = 1,0 L$ — er det derimod let at paavise, at τ_g vokser med n , naar Elektroderne er pudsede med fint Karborundum-

papir. Nøjagtige Tal kan ikke gives; men τ_g kan f. Eks. for $n = 25$ blive lige saa stor som τ_{\min} , den totale Forsinkelse altsaa fordobles. Ved groftpuddede Elektroder kræves under de nævnte Forhold som Regel flere Hundrede Gnister til at opnaa en sikker iagttagelig Værdi af τ_g .

Den omhandlede Maalemetode er dog ikke særlig vel egnet til Bestemmelse af Ekstraforsinkelsen τ_g , idet denne først antager større Værdier, naar τ_{\min} er saa stor, at den falder udenfor det Omraade, indenfor hvilket vi for Tiden kan foretage nogenlunde nøjagtige Maalinger. Vi skal derfor kort omtale en anden Fremgangsmaade til Belysning af disse Forhold, nemlig den af H. HERTZ¹ ved Opdagelsen af den foto-elektriske Virkning af det ultraviolette Lys benyttede Opstilling. Denne bestaar i Hovedsagen af en Gnistinduktor, hvis Gnistrum med tilhørende Elektroder kan udsættes for Bestraaling med ultraviolet Lys, f. Eks. fra en elektrisk Gnist eller fra en Lysbue. Som nævnt i Indledningen paaviste HERTZ, at Gnisten lettere fremkommer, naar Elektroderne (særlig Katoden) bestraaes af ultraviolet Lys, end naar dette ikke er Tilfældet. Andre Forskere har paavist, at det alene er Katoden, det kommer an paa, og at Virkningen fremkommer ved, at det ultraviolette Lys frigør Elektroner fra Katodens Overflade. Endelig har E. WARBURG² paavist, at det ikke er Gnistspændingen, der nedsættes under Paavirkningen af det ultraviolette Lys, men derimod Gnistforsinkelsen, der formindskes. Denne Opfattelse stemmer godt med de HERTZ'ske Forsøg, idet en Formindskelse af Gnistforsinkelsen ved Gnistinduktorens kortvarige Spændingsstød vil bevirke en Forøgelse af den opnaaelige Gnistlængde.

¹ H. HERTZ: Wied. Ann. 31, p. 983—1000. 1887.

² E. WARBURG: Wied. Ann. 59, 1—16. 1896; Wied. Ann. 62, 385—395. 1897.

Nu er det imidlertid i det foregaaende paavist, at Gnistforsinkelsen ved »ren« Katode er saa lille, som den overhovedet kan blive, og dens Værdi formindskes ikke ved Katodens Bestraaling med ultraviolet Lys. Da den af HERTZ iagttagne Effekt ifølge det foregaaende uden Tvivl beror paa, at Gnistforsinkelsen nedsættes, saa er der kun den Mulighed tilbage, at de af HERTZ og de andre Forskere benyttede Elektroder ikke har været »rene« i den her benyttede Betydning af Ordet. Om dette Spørgsmaal siger HERTZ¹: »Die Pole müssen rein und glatt sein, sind sie verunreinigt oder durch langen Gebrauch stark corrodirt, so versagt wohl die Wirkung«. HERTZ fremhæver saaledes, stik imod ovenfor nævnte Antagelse, at Elektroderne netop skal være rene for med Sikkerhed at vise den omtalte Effekt. E. WIEDEMANN og H. EBERT², der først paaviste, at det alene er Katodens Bestraaling, der er afgørende, udtaler sig ikke om Renheden af de af dem benyttede Elektroder, der bestod af 3 mm Platinkugler; men det fremgaar af Forsøgsbeskrivelsen, at der i det højeste undtagelsesvis kan være foregaaet nogen Rensning efter Gennemgangen af et stort Antal Gnister. Der er saaledes ikke nogen Tvivl om, at Elektroderne i det sidste Tilfælde i Almindelighed har været forurenede ved forudgaaende Udladninger og maaske paa anden Maade. Selve den af HERTZ givne Beskrivelse af Kuglernes Renhedstilstand tyder egentlig heller ikke paa, at disse har været, hvad vi kalder »rene«. For med Sikkerhed at afgøre dette Spørgsmaal har vi anstillet en Række Forsøg med den HERTZ'ske Opstilling, af hvilke nogle skal refereres i det følgende:

Gnistelektroderne var 10 mm Metalkugler. Elektroderne

¹ H. HERTZ: l. c. p. 987.

² E. WIEDEMANN u. H. EBERT: Wied. Ann. 33, 241—264. 1888.

var ved Forsøgets Begyndelse rene, karborundumpudsede. Elektrodeafstanden l' indstilledes til at begynde med saa lang, at man var sikker paa ikke at faa Gnist; derefter sættes Gnistinduktoren i Gang, og Elektrodeafstanden formindskedes ganske langsomt indtil for $l' = l_{\max}$ den første Gnist viser sig. Som Regel kommer der kun 1 eller nogle faa i denne Stilling. Først naar l' yderligere formindskes til l_1 , kommer der yderligere Gnister. Selv i denne nye Stilling viser det sig, at naar der i nogen Tid har fundet Gnistring Sted, bliver Gnisterne efterhaanden sjældnere og sjældnere for til sidst ganske at ophøre. For atter at faa Gnistring maa Elektrodeafstanden yderligere formindskes. Denne Proces kan gentages flere Gange, indtil man tilsidst kommer til en Elektrodeafstand af l_{\min} , ved hvilken Gnistring vedbliver uforandret — i hvert Fald i meget lang Tid. Det ligger i Forholdenes Natur, at Længden l_{\min} ikke kan bestemmes med nogen stor Nøjagtighed. Bestemmelsen af l_{\max} kan derimod foretages med stor Nøjagtighed.

Som et Eksempel anføres de ved en anden Maalingsrække iagttagne Elektrodeafstande:

$$\begin{aligned} l_{\max} &= 5,5 \text{ mm} \\ l_1 &= 5,2 \text{ »} \\ l_2 &= 4,8 \text{ »} \\ l_{\min} &= 3,5 \text{ »} \end{aligned}$$

Udsættes Katoden for Bestraaling af ultraviolet Lys fra en Buelampe, erholder man i alle Tilfælde, selv efter lang Tids forudgaaende Gnistgennemgang, Gnister lige op til $l' = l_{\max}$, men heller ikke under nogen Omstændighed for en større Elektrodeafstand, selv ikke naar Elektroderne er rene, karborundumpudsede.

Det viste sig ogsaa her, at det kun kommer an paa,

at Katoden er ren. Naar dette er Tilfældet, er Anodens Tilstand uden Indflydelse.

Disse Forsøg bekræfter saaledes fuldt ud Resultaterne af vore forudgaaende Undersøgelser og viser tillige, at HERTZ-Effekten ikke fremkommer, naar der anvendes, hvad vi her kalder en »ren« Katode.

Men Forsøgene beviser tillige, at selve Gnistgennemgangen her i udpræget Grad forurener Elektroderne¹. Naar dette Fænomen her kommer forholdsvis kraftigere frem end ved de i det foregaaende omtalte Maalinger, ligger dette vistnok i Hovedsagen i følgende to Omstændigheder: 1) Forsinkelserne er ved Forsøgene med den HERTZ'ske Opstilling, hvor man arbejder med de med den givne Spænding maksimalt opnaaelige Gnistlængder, i sig selv meget større end ved de tidligere Maalinger; 2) den Elektricitetsmængde, der ved hver enkelt Gnist passerer Gnistbanen, er ligeledes betydelig større end ved Forsøgsopstillingen i Fig. 2.

Det sidst nævnte Forhold kan man delvis ændre ved i Serie med Gnistbanen at indskyde en Kondensator med ganske ringe Kapacitet, men med saa stor Pladeafstand, at Gnisten ikke slaar over i Kondensatoren. Har man paa denne Maade svækket Gnisterne, viser det sig — som det var at vente — at det Antal Gnister, der kræves for at forøge Forsinkelsen i et vist Forhold, bliver desto større, jo mindre Kondensatorens Kapacitet er. Vi kan maaske udtrykke det ved at sige, at jo mindre Kapaciteten er, desto stabilere er Gnistbanen.

Det viser sig ligeledes — i Overensstemmelse med de foran omtalte Maalinger — at Gnistbanen er mere stabil med groft pudset end med fint pudset Katode.

¹ Ogsaa en oprindelig ren Anode, der har været udsat for Gnistring, giver, anvendt som Katode, en forøget Forsinkelse.

Endelig viser det sig, at Stabiliteten er forskellig for forskellige Metaller, idet den vokser i den angivne Rækkefølge: Bly, Tin, Aluminium, Zink, Kobber, Messing, Jern, Platin, Nikkel, Molybdæn, Wolfram.

Ifølge det foregaaende skal en Gnistbane, i hvilken Katoden stadig holdes ren, karborundumpudset, altid give Gnist for $l' = l_{\max}$, og det uafhængigt af, om Katoden bestraales med ultraviolet Lys eller ikke.

Til at prøve denne Konsekvens anvendte vi den i Fig. 23 viste Opstilling, hvor Elektroderne bestaar af to roterende Messingskiver *A* og *C*, af hvilke Katoden *C* under Rotationen stadig holdes pudset af et Stykke temmelig groft Karborundumpapir *S*. Indskydes denne Gnistbane i den HERTZ'ske Opstilling, viser det sig, at Gnisterne ganske regelmæssig bliver ved med at slaa over for $l' = l_{\max}$, ganske uafhængig af, om Katoden bestraales eller ikke. En Bestraaling af Katoden med ultraviolet Lys har i dette Tilfælde ingen Indflydelse, hverken paa Gnisthyppigheden eller paa Størrelsen af den maksimale Gnistlængde. Anodens Tilstand spiller som sædvanlig ingen Rolle.

Forsøgene med HERTZ-Effekten har saaledes fuldtud og i enhver Henseende bekræftet vore tidligere Resultater. Det

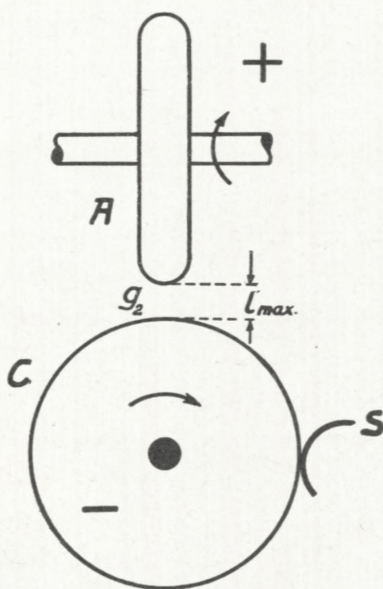


Fig. 23.

Gnistbane med roterende Elektroder. Anode *A* og Katode *C*. Anoden er mikrometrisk indstillelig i Højden. *S* Karborundumpapir.

er samtidig godtgjort, at HERTZ-Effekten ikke optræder ved ren, karborundumpudset Katode.

b. Gnistudladningens Indvirkning paa urene Elektroder.

Paa Elektroder, der er forurenede med Olie, Fedt el. lign., er Virkningen af selve Gnistgennemgangen af en noget anden Art. Forholdene vil her ofte stille sig saaledes: Ved første Gnist har Forsinkelsen en høj Værdi, τ' . Maales Forsinkelsen derpaa ved Hjælp af en ny Gnistudladning umiddelbart efter Gennemgangen af den første Gnist, vil den ny Forsinkelse, τ'' , hyppig være betydelig mindre end τ' og ofte ikke meget større end τ_{\min} . Lader man derimod hengaa længere Tid mellem de to Maalinger, vil i de fleste Tilfælde, naar Elektroderne ikke er meget urene, τ'' ligge oppe i Nærheden af τ' . Er Elektroderne derimod meget urene, vil dog som Regel ogsaa i sidste Tilfælde τ'' være en Del mindre end τ' . Den gamle Iagttagelse, at Gnist Nr. 2 kommer lettere end Gnist Nr. 1, stemmer saaledes med Forholdene ved snavsede Elektroder. — Ved rene Elektroder er, som vi har set foran, det omvendte Tilfældet.

Den af den første Gnist ved snavsede Elektroder bevirkede Formindskelse af Gnistforsinkelsen skyldes ganske sikkert en Forandring af Katodens Overflade ved og omkring Gnistens Udgangspunkt. Forandringen kan maaske, helt eller delvis, skyldes en Forkulning af Fedt- eller Oliehinden paa det paagældende Sted¹.

¹ Den almindeligvis givne Forklaring af, at Gnist 2 kommer lettere end Gnist 1, gaar ud paa, at den af den første Gnist frembragte Ionisation i Gnistrummet delvis holder sig og letter Dannelsen af den næste Gnist. J. S. TOWNSEND (Electricity in Gases, p. 346. 1915) har paavist Usandsynligheden af denne Forklaring. TOWNSEND ser to Muligheder for Forklaringen af dette Forhold, nemlig enten, at den første Gnist for-

Det er en Selvfølge, at der ved Gnistdannelse mellem urene Elektroder kan opstaa en Række Komplikationer, som det ofte vil være vanskeligt eller umuligt at gøre Rede for i alle Enkeltheder. Det er derfor ogsaa kun naturligt, at tidligere paa det Omraade udførte Arbejder, under hvilke man kun i meget ringe Grad eller slet ikke har haft Opmærksomheden henvendt paa Beskaffenheden af Elektrodernes (Katodens) Overflade, indeholder indbyrdes modstridende Resultater.

Ved Sammenligning mellem Resultaterne af tidligere Arbejder og de foran udledede maa det heller ikke glemmes, at saa godt som alle de tidligere Undersøgelser beskæftigede sig med Gnistforholdene ved relativt meget langsomt opvoksende Spænding, hvor Længden af den undersøgte Gnist ligger i Nærheden af den med den benyttede Spænding maksimalt opnaelige Gnistlængde, medens vi i dette Arbejde i Hovedsagen beskæftiger os med Gnistforsinkelsen i de Tilfælde, hvor Gnistlængden er lille i Sammenligning med den maksimale. De hertil svarende Forsinkelser er som Regel saa smaa, at de ligger langt under det Maaleomraade, man tidligere har været i Stand til at beherske.

R. NORMAN CAMPBELL¹ er en af de faa, der har ofret Spørgsmaalet om den Indflydelse, Beskaffenheden af Elektrodernes Overflade har paa Gnistforsinkelsen, nogen Opmærksomhed. Hvad vi i det foregaaende kalder Urenhed, der giver Ekstraforsinkelse, kalder han Haardhed og siger andrer Katodens Overflade paa en saadan Maade, at den i sig selv svage Indflydelse af Dagslyset paa Katoden forøges, eller at selve Luften ændres ved Passagen af den til den første Gnist svarende Strøm. Den første af disse Forklaringer lader sig i hvert Fald ikke anvende her, hvor Forsøgene foregaar i Mørke; den anden Forklaring er paa Forhaand lidet sandsynlig.

¹ R. NORMAN CAMPBELL: Time-lag in the Spark Discharge. Phil. Mag. (6). Vol. 38, p. 214—230. 1919.

herom følgende: »The cause of "hardness" was connected with some very easily variable surface condition of the plug. It had nothing to do with the geometrical form or material. The hardness was liable to change with the most trivial alterations; it usually seemed much easier to make a soft plug hard than to make a hard plug soft«. (S. 226).

»Hardness is a property of the cathode only. No treatment of the anode will ever change a gap from soft to hard or vice versa. A gap may thus be hard in one direction but soft in the other.

The circumstances which make a cathode hard are exceedingly various and difficult to define in detail; but their general nature was obvious. Thus a cathode could always be made hard by rubbing it with fine oily emery-paper; it could usually be made soft again by heating to redness in a Bunsen flame. A freshly turned surface was usually soft. Hardness is therefore due to some adherent film on the surface which usually consists of oily matter; but it seemed that the state of the atmosphere exerted some influence, for on some days it was impossible to make any gap really soft.« (S. 228).

»Two practical hints for abolishing hardness may be given. First it is a good plan to allow a strong spark to pass between the electrodes for a few seconds immediately before observations; second it is a very bad plan to clean electrodes by rubbing with fine emery cloth. Unless the surface is actually pitted, discoloration due to previous discharges is positively an advantage; to rub the surface with fine emery is to rub the "hard" film in rather than to rub it off, and so to prevent its removal by other means.« (S. 230).

NORMAN CAMPBELL er saaledes fuldt ud klar over, at det først og fremmest er Katodens Renhed, det kommer

an paa. Han har ligeledes paavist, at Urenheden som Regel skyldes Olie eller lignende. Men det er ikke lykkedes ham fuldt ud at klare Forholdene eller at angive en Maade, paa hvilken man altid kan faa en »ren« Elektrode. Udtalelserne om Indvirkningen af en forudgaaende Gnist tyder paa, at de af ham benyttede og som »soft« betegnede Elektroder, ikke har været helt rene. Den ejendommelige Indflydelse af Anodens Overfladebeskaffenhed i de Tilfælde, hvor Katoden ikke er ren, er ligeledes undgaaet hans Opmærksomhed. Men en fuldstændig Klaring af disse Forhold vilde vistnok ogsaa have været en Umulighed med den benyttede Undersøgelingsmetode og overhovedet med de da til Raadighed staaende Hjælpemidler.

9. Gnistforsinkelse ved spidse Elektroder.

I det foregaaende har vi i Hovedsagen kun betragtet Gnistforsinkelser i det simplest mulige Tilfælde, nemlig mellem kugleformede Elektroder, hvis Afstand er mindre end Kuglediametren, saaledes at Gnistdannelsen foregaar i et omtrent homogent Felt. En Undtagelse herfra danner kun nogle af de ved lavere Tryk foretagne Maalinger.

Det kan imidlertid i flere Henseender være af Interesse ogsaa at undersøge Gnistforsinkelsen med spidse Elektroder, og vi har derfor foretaget nogle enkelte saadanne Maalinger. De dertil benyttede

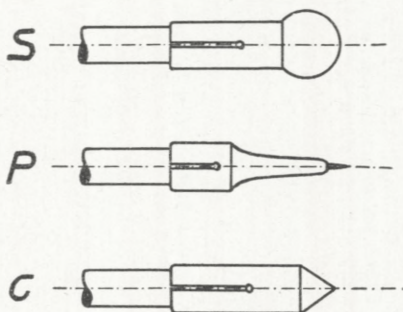


Fig. 24.

Forskellige Elektrodeformer. *S* Kugler, 10 mm i Diameter, *C* Konus og *P* Spids.

Elektrodeformer ses i Fig. 24. *S* er den i Maalegnistbanen sædvanligvis benyttede 10 mm Kugleelektrode af Messing; *C* er en kegleformet Elektrode med en Topvinkel paa ca. 60° ; *P* er en Naaleelektrode, hvis yderste Spids bestaar af en Synaal. De nævnte Elektroder er i de følgende Forsøg holdt rene ved Pudsning med Karborundumpapir, der ved *C*- og *P*-Elektroderne var fastgjort paa et plant Træstykke. Vi har bl. a. foretaget en Række Sammenligninger mellem Forsinkelserne i Gnistrum med de forskellige Elektrodeformer, idet Gnislængden (Elektrodeafstanden) var den samme i alle Tilfælde. Resultaterne af disse Forsøg er opført i nedenstaaende Tabel.

Tabel 3.

Primærgnist $L = 5$ mm; Længde af den undersøgte Gnist $l = 3$ mm; Elektroderne rene.

Katode	Anode	$\tau_{\min} \times 10^8$
Kugle <i>S</i>	Kugle <i>S</i>	10,5 Sek.
Konus <i>C</i>	Konus <i>C</i>	5,8 »
Spids <i>P</i>	Spids <i>P</i>	5,6 »
Konus <i>C</i>	Kugle <i>S</i>	10,3 »
Spids <i>P</i>	Kugle <i>S</i>	10,3 »
Kugle <i>S</i>	Konus <i>C</i>	5,8 »
Kugle <i>S</i>	Spids <i>P</i>	5,6 »

Det fremgaar heraf, at for samme Gnislængde er de Gnistbaner, der har spidse Anoder, de hurtigste. Derimod har Katodens Form kun ringe Indflydelse paa Forsinkelens Størrelse.

En bekvemmere Maade at sammenligne de forskellige Elektrodeformer paa er imidlertid følgende: I den i Fig. 2 viste Opstilling benytter man i Gnismikrometret g_1 to kugleformede Elektroder i den indbyrdes Afstand l_1 , i Gnist-

Tabel 4.

Primærgnist $L = 5$ mm. Gnislængderne l_1 og l_2 giver samme

Forsinkelse i Gnistrømmene g_1 og g_2 (Se Fig. 2).

Den ankommende Impuls er (med Undtagelse af Nr. 14) altid negativ.

Med Hensyn til Elektrodebetegnelserne S , P og C henvises til Fig. 24.

Nr.	Gnistbane g_1			Gnistbane g_2			Forholdet l_2/l_1	Bemærkninger
	Katode	Anode	l_1	Katode	Anode	l_2		
			mm			mm		
1	Kugle S	Kugle S	1	Spids P	Spids P	1,33	1,33	Instillinger paa samme Forsinkelse kan i disse Tilfælde foretages med stor Sikkerhed.
2	»	»	2	»	»	2,68	1,34	
3	»	»	3	»	»	4,02	1,34	
4	»	»	4	»	»	5,43	1,36	
5	»	»	5	»	»	6,70	1,34	
6	»	»	6	»	»	8,05	1,34	
7	»	»	6,3	»	»	8,43	1,34	
8	»	»	7,45	»	»	9,60	1,29	Angaaende disse Forsøg se Fodnote 1, 2 og 4.
9	»	»	8,90	»	»	12,15	1,36	
10	»	»	3	Kugle S	Spids P	3,99	1,33	Kan bestemmes med stor Sikkerhed.
11	»	»	5	»	»	6,67	1,33	
12	»	»	6	»	»	8,00	1,33	
13	»	»	8,85	»	»	11,6	1,31	Se Note 2.
14	»	»	8,85	»	»	15,5		Se Note 3.

Note 1. Forsøg 8 giver de største Værdier af l_1 og l_2 , for hvilke der kommer Gnist i begge Gnistrum. Bestemmelsen er ret usikker.

Note 2. Forsøgene 9 og 13 giver de absolut største Værdier af l_1 og l_2 , der faas, naar det andet Gnistgab aabnes saa meget, at der ingen Udladning finder Sted i dette.

Note 3. I dette Tilfælde var den ankommende Impuls positiv.

Note 4. Synlige Udladninger fremkommer for betydelig højere Værdier af l_2 , men en skarp begrænset, stærkt lysende Gnist først for den angivne Længde af Elektrodeafstanden i g_2 ,

Tabel 5.

Primærgnist $L = 5$ mm. Gnistlængderne l_1 og l_2 giver samme Forsinkelse i Gnistbanerne g_1 og g_2 (Se Fig. 2).
Den ankommende Impuls er altid negativ.

Nr.	Gnistbane g_1			Gnistbane g_2			Forholdet l_2/l_1	Bemærkninger
	Katode	Anode	l_1	Katode	Anode	l_2		
1	Kugle S	Kugle S	3	Konus C	Konus C	3,93	1,31	Bestemmelsen sikker.
2	»	»	5	»	»	6,55	1,31	
3	»	»	8,85	»	»	11,08	1,25	Note 1 og 3.
4	»	»	3	Kugle S	Konus C	3,70	1,23	Bestemmelsen sikker.
5	»	»	6	»	»	7,30	1,22	
6	»	»	8,80	»	»	10,6	1,21	Note 1 og 2.
7	»	»	3	Konus C	Kugle S	3,00	1,00	Bestemmelsen ret usikker.
8	»	»	4	»	»	4,15	1,03	
9	»	»	6	»	»	6,40	1,07	
10	»	»	8,80	»	»	9,50	1,08	Note 1 og 4.
11	»	»	2	Spids P	Kugle S	2,00	1,00	Bestemmelsen ret usikker.
12	»	»	3	»	»	3,00	1,00	
13	»	»	4	»	»	4,10	1,03	
15	»	»	5	»	»	5,36	1,07	
16	»	»	6	»	»	6,42	1,07	
17	»	»	8,85	»	»	9,15	1,035	Note 1 og 5.

Note 1. Forsøgene 3, 6, 10 og 17 giver de absolut største Værdier af l_1 og l_2 , der faas, naar det andet Gnistgab aabnes saa meget, at der ingen Udladning finder Sted i dette.

Note 2. Udladninger ses ved meget større Værdier af l_2 f. Eks. for $l_2 = 12$ mm; men en Gnist fremkommer først for $l_2 = 10,6$ mm.

Note 3. En synlig, ulden, traadformet Udladning fremkommer for meget større Værdier af l_2 , men først for $l_2 = 11,08$ mm kommer der en skarp begrænset, klar Gnist.

Note 4. For $l_2 = 9,75$ mm ses ingen Udladning.

Note 5. Svag Udladning synlig over hele Gnistbanen fra $l_2 = 10$ mm, og fra $l_2 = 9,25$ mm en klar Lysprik ved Spidsen.

mikrometret g_2 f. Eks. to Naaleelektroder med en indbyrdes Afstand l_2 . Man varierer da paa l_2 , indtil Forsinkelserne i de to Gnistbaner bliver lige store, hvad man med stor Sikkerhed kan konstatere ved at anbringe de nærmeste Ender af de to Elektroder A_1 og A_2 i meget ringe Afstand fra hinanden paa den fotografiske Plade. Er de to Forsinkelser lige store, ligger Skillelinien i Midten. Tabellerne 4 og 5 indeholder Resultaterne af en Række saadanne sammenlignende Maalinger mellem kugleformede, koniske og naalespidse Elektroder i forskellige Kombinationer.

Det viser sig overalt, at den Sikkerhed, hvormed denne Sammenligning af Forsinkelsen i en Kugle-Kugle Gnistbane og i en Gnistbane, hvor een eller begge Elektroder er spidse, kan foretages, er meget stor i alle de Tilfælde, hvor der findes en spids Anode (C eller P), men betydelig mindre i de Tilfælde, hvor kun Katoden er spids.

Foruden de ovenfor omtalte Maalinger af de Gnistlængder, l_1 og l_2 , der giver samme Forsinkelse, blev der ogsaa i hver Maalingsrække foretaget en Bestemmelse af de maksimale Gnistlængder, der kan opnaas i g_1 og g_2 . Denne Bestemmelse foretoges paa to forskellige Maader: (1) Man indstillede baade g_1 og g_2 paa de største Længder, med hvilke der kan opnaas Gnister i begge Gnistgab for samme Udladning. Denne Bestemmelse var dog ret vanskelig og ikke særlig sikker; kun een Maaling er derfor udført paa denne Maade — Nr. 8 i Tabel 4 — og Resultatet stemmer, som man ser, ikke særlig godt med de ad anden Vej fundne. (2) Man fjernede begge Elektroder i det ene Gnistmikrometer og bestemte den største Gnistlængde, der kunde faas i det andet Gnistmikrometer. Denne Bestemmelse foretoges baade for Elektrodekombinationen Kugle-Kugle og for den dermed sammenlignede Elektrodekombination. Resultaterne

af saadanne Bestemmelser er opført i Tabel 4 Nr. 9 og 13, samt i Tabel 5 Nr. 3, 6, 10 og 17.

For Kugle-Kugle opnaaedes under disse Forhold for en Primærgnist $L = 5$ mm en maksimal Gnistlængde, der laa mellem 8,80 og 8,90 mm. Det er naturligt, at denne Værdi af l_1 er større end den tidligere fundne, da der i det foreliggende Tilfælde finder en fuldstændig Reflektion Sted ved den aabne Gnistbane; den reflekterede Bølge vandrer tilbage og en Del af den vil naa til den anden Gnistbane og forhøje dennes Spænding.

Ved spidse Elektroder fremkommer der i mange Tilfælde en lysende Udladning selv for Elektrodeafstande, der ligger langt over de i Tabellerne angivne Værdier af l_2 . Disse angiver de største Gnistlængder, for hvilke der under de angivne Forhold fremkommer en skarp begrænset, lysende Gnist. Nærmere Oplysninger herom findes i Tabellerne og de tilhørende Noter.

I alle Tilfælde var de til de undersøgte Gnistbaner ankommende Impulser negative med Undtagelse af Nr. 14 i Tabel 4, hvor den ankommende Impuls var positiv.

Af Resultaterne i Tabellerne 4 og 5 fremgaar følgende:

I alle Tilfælde, hvor Anoden er spids, er Forholdet l_2/l_1 mellem de Gnistlængder, der giver samme Forsinkelse, meget nær konstant for alle Gnistlængder lige op til de maksimalt opnaaelige, saaledes som det fremgaar af Tabel 4 Nr. 1—13 og Tabel 5 Nr. 1—6.

Forholdet l_2/l_1 har meget nær følgende Værdier:

Gnistmikrometer g_2		
Katode	Anode	l_2/l_1
Naalespids	Naalespids	1,34
Kugle	Naalespids	1,33
Konus	Konus	1,31
Kugle	Konus	1,22

Det ses, at Forsinkelsen for en naaleformet Spids som Anode er ret uafhængig af Katodens Form. Dog synes + Spids — Spids for samme Længde at være lidt hurtigere end + Spids — Kugle. Noget lignende gælder koniske Elektroder, kun er den sidstnævnte Forskel større i dette Tilfælde.

Derimod vokser Forholdet l_2/l_1 i de Tilfælde, hvor Anoden er kugleformet og Katoden spids, fra Værdien 1,0 for smaa Gnistlængder til en noget højere for større Gnistlængder. I intet af de undersøgte Tilfælde har Forholdet dog været større end 1,09.

Resultaterne kan derfor sammenfattes saaledes:

For spids Anode er Forsinkelsen kun i ringe Grad — maaske slet ikke — afhængig af Katodens Form.

For kugleformig Anode er Forsinkelsen lidt, — men ogsaa kun lidt — mindre for en spids end for en kugleformig Katode.

Disse Resultater gælder under Forudsætning af, at den ankommende Impuls er negativ. Er den positiv, vil Forholdene ved de usymmetriske Gnistbaner ændre sig noget, saaledes som det fremgaar af Forsøg Nr. 14 i Tabel 4. Der har dog ikke været Lejlighed til at gaa dybere ind paa dette Spørgsmaal.

Den højeste Værdi, vi har fundet for Forholdet mellem de maksimale Gnistlængder for spidse og kugleformede Elektroder, er 1,36, en Værdi, der ligger langt under den, man finder ved langsomt opvoksende Spænding. Saaledes har W. VOEGE¹ fundet, at sidstnævnte Forhold ligger omkring 3 for de her omhandlede Gnistlængder. Det er meget naturligt, at der findes en saadan Forskel mellem de mak-

¹ W. VOEGE: ANN. D. PHYS. (4). 14. p. 556—568. 1904.

simale Gnistlængder, der ved spidse Elektroder i det ene Tilfælde kan opnaas ved Hjælp af et meget hurtigt opvoksende, men relativt meget kortvarigt Spændingsstød og i det andet Tilfælde for en langsomt opvoksende, vedvarende Spænding. Den store Gnistlængde i sidste Tilfælde skyldes uden Tvivl den gennem Forudladninger bevirkede Ionisation samt Ladningsforskydninger, og Forsinkelsen er her sikkert meget stor, saa stor, at den ligger ganske udenfor det Maaleomraade, indenfor hvilket vi i det foregaaende har arbejdet. Disse store Forsinkelser er bl. a. iagttaget af E. W. PEEK jr.¹ og R. NORMAN CAMPBELL².

For skarpe, relativt meget kortvarige Spændingsstød, hvor de foran omtalte, ret langsomme Forandringer i Gnistbanens Tilstand ikke faar Tid til at udvikles, ligger Forholdene, som vist i det foregaaende, ganske anderledes. Her er Forsinkelserne meget nær de samme for alle Former af Elektroder, naar Forholdet mellem Gnistlængderne er lig med Forholdet mellem de maksimalt opnaelige Gnistlængder. De teoretiske Konsekvenser heraf vil blive omtalt i II. Del af denne Afhandling.

Et Resumé af Resultaterne af de foregaaende Undersøgelser vil ligeledes blive givet i Indledningen til II. Del.

Ved Udførelsen af disse Undersøgelser har Ingeniørerne J. P. CHRISTENSEN, A. G. JENSEN og CHR. NYHOLM ydet mig udmærket Assistance. En Del af Udgifterne til Forsøgene er afholdt af en Bevilling fra Carlsbergfonden.

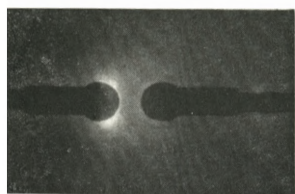
*Den polytekniske Lærestanstalt, Laboratoriet for Telegrafi og Telefoni.
Januar 1922.*

¹ F.W. PEEK jr.: Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering. 1915.

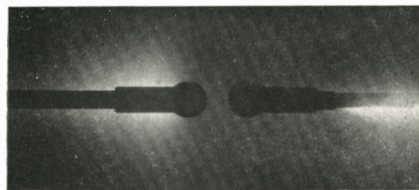
² R. NORMAN CAMPBELL: Phil. Mag. (6). Vol. 38, 214—230. 1919.

INDHOLDSFORTEGNELSE.

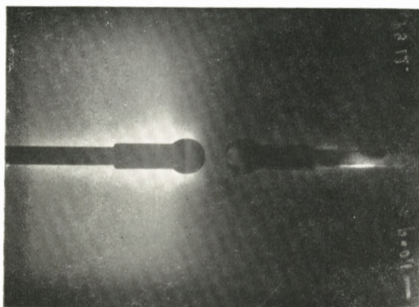
	Side
1. Indledning	3
2. Den anvendte Maalemetode	14
3. Foreløbige Forsøg	21
4. Gnistforsinkelse ved »ren« eller »aktiv« Katode. Den minimale Forsinkelse.....	25
5. Den minimale Forsinkelses Afhængighed af Lufttrykket. (Forsinkelsen i andre Luftarter)	31
6. Gnistforsinkelse ved urene Elektroder.....	40
7. Elektrodernes Renhed eller Aktivitet	49
8. De af Gnisterne selv bevirkede Ændringer i Tilstanden af Elektrodernes Overflade. Hertz's Effekt.....	54
9. Gnistforsinkelse ved spidse Elektroder	63



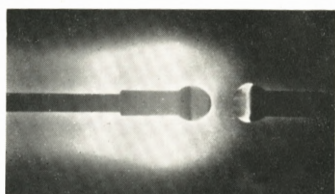
0,31 (50)



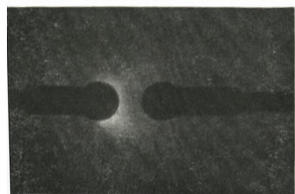
0,03 (300)



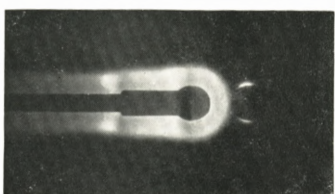
0,1 (360)



0,27 (300)



0,6 (50)



0,6 (150)

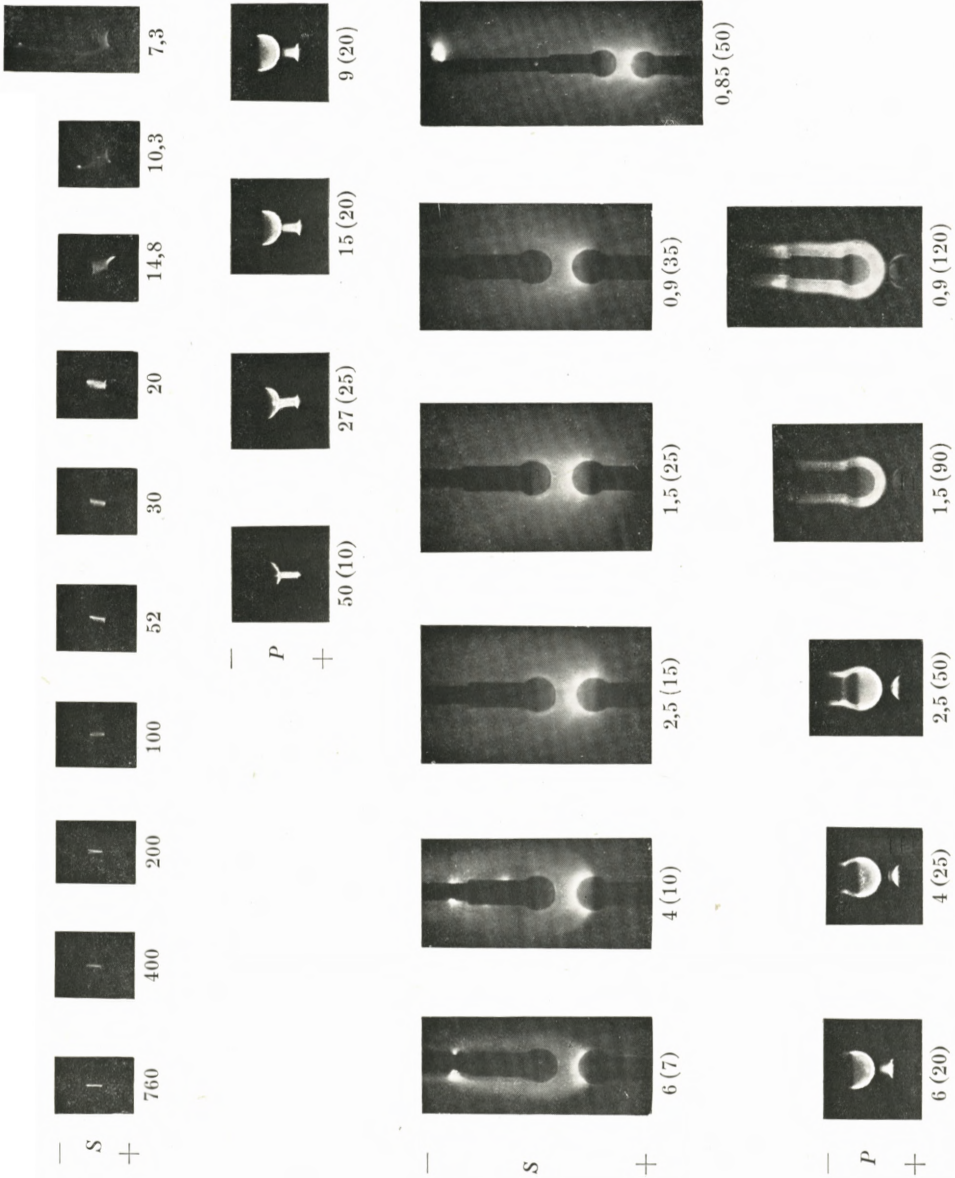
P

+

-

S

+



MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKESSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7 RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse »NH ₂ COONH ₄ + H ₂ O ⇌ (NH ₄) ₂ CO ₃ « und »CO ₂ + H ₂ O ⇌ H ₂ CO ₃ «. 1921	3.75

4. BIND.

	Kr. Ø.
1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922.....	0.60
3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922.....	0.70
6. PRYTZ, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922 ..	0.75
7. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922	2.15
8. BØGGILD, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). (Under Pressen).....	
9. WIEDEMANN, E. und FRANK, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922	0.75
10. PEDERSEN, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. (Under Pressen)	